

UNIVERSITE PARIS XI

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentées pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES
par

Philippe BENILAN

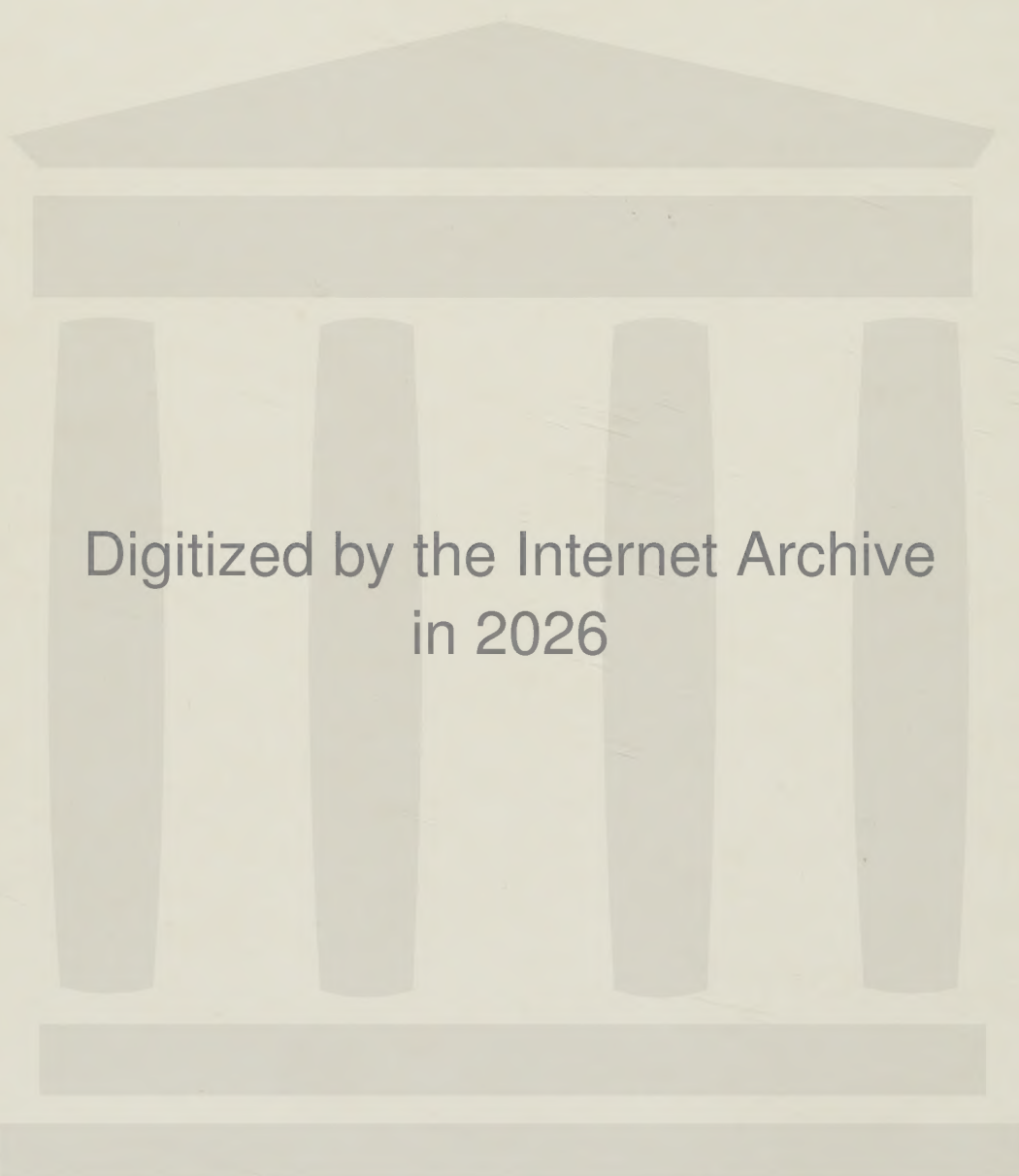
1ère Thèse : Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque
et applications.

2ème Thèse : Théorie du relèvement.

Soutenues le 18 Décembre 1972 devant la Commission d'Examen

MM. J. DENY Président

H. BREZIS	Examineurs
G. CHOQUET	
J.L. LIONS	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547102_0017

UNIVERSITE PARIS XI

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentées pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES
par

Philippe B E N I L A N

1ère Thèse : Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque
et applications.

2ème Thèse : Théorie du relèvement.

Soutenues le 18 Décembre 1972 devant la Commission d'Examen

MM. J. DENY Président

H. BREZIS		Examineurs
G. CHOQUET		
J.L. LIONS		



Je tiens au début de ce travail à exprimer ma très profonde reconnaissance à Monsieur J. DENY qui m'a fait l'honneur de présider le jury. Depuis mon arrivée à Orsay, il y a dix ans, son soutien tant moral que scientifique, spécialement pendant mon séjour à Rabat, a été pour moi d'un poids considérable pour aborder la recherche mathématique.

Depuis trois ans Monsieur H. BREZIS a dirigé mes travaux : par son remarquable cours sur les opérateurs monotones et les semi-groupes, il m'a initié aux problèmes non linéaires ; les très nombreuses discussions que nous avons eues m'ont conduit à la plupart de mes résultats ; son rayonnement international m'a permis d'être au courant de l'évolution d'un sujet en pleine expansion. Je lui adresse très sincèrement tous mes remerciements.

Je remercie bien vivement Monsieur J.L. LIONS qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et Monsieur G. CHOQUET d'avoir accepté de me proposer un second sujet de thèse.

Madame Maynard a dactylographié mon manuscrit avec compétence et beaucoup de patience : je l'en remercie chaleureusement.

Je tiens enfin à remercier tous mes collègues et amis tant d'Orsay que de Rabat qui, au sein de divers séminaires ou en dehors, m'ont aidé en partageant leurs connaissances et ont su créer une ambiance propre à la recherche.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 0. Préliminaires (18 pages)

1. Produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ et application de dualité. 0.1
2. Opérateurs accréatifs. 0.7
3. Dérivabilité des fonctions à valeurs vectorielles 0.10

Chapitre I. Solutione intégrales (42 pages)

1. Définitions. I.1
2. Propriétés des bonnes solutions. I.4
3. Théorèmes d'existence. I.15
4. Perturbations lipschitziennes.
Opérateurs m-accréatifs. I.21
5. Solutions périodiques. I.28
6. Convergence. I.34
7. Diverses remarques et généralisations. I.39

Chapitre II. Equations d'évolution dans les espaces $L^1(\Omega)$ (59 pages)

1. Généralités. II.1
2. Equations quasi linéaires du 1er ordre. II.11
3. Equation non linéaire du type "diffusion des gaz" II.29

Bibliographie.

INTRODUCTION.

Etant donnés un opérateur (non linéaire) accréatif A d'un espace de Banach quelconque X , $f \in L^1(0, T; X)$ et $u_0 \in \overline{D(A)}$, nous étudions l'équation d'évolution

$$(1) \quad \frac{du}{dt} + Au \ni f, \quad u(0) = u_0.$$

Le premier résultat général sur cette équation est dû à KOMURA [25] qui démontre pour un opérateur A maximal monotone d'un espace de Hilbert et $u_0 \in D(A)$ l'existence et l'unicité d'une fonction u lipschitzienne sur $]0, +\infty[$ et p.p.-dérivable sur $]0, +\infty[$ vérifiant

$$(2) \quad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni 0 \quad \text{p.p. } t \in]0, +\infty[, \quad u(0) = u_0.$$

Son travail a été précisé, généralisé au cas d'opérateurs m -accréatifs d'un espace à dual uniformément convexe, dépendant éventuellement de façon très régulière du temps. ^(*)

Le résultat de Komura peut être étendu au cas d'un opérateur m -accréatif d'un espace réflexif et plus généralement d'un espace de Banach X pour lequel toute fonction $u : [0, T] \mapsto X$ lipschitzienne est p.p. dérivable sur $]0, T[$. L'absence de cette propriété dans les espaces de Banach quelconques complique considérablement l'étude du problème (1) : l'exemple simple de l'opérateur linéaire de $X = \mathcal{C}([0, 1])$ défini par $D(A) = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]); u(0) = 0\}$, $Au = -\frac{du}{dx}$ montre que le résultat de Komura ne s'étend pas à un espace de Banach quelconque, l'exemple dû à WEBB [38] de l'opérateur non linéaire de $X = \mathcal{C}([0, +\infty[)$, espace des fonctions uniformément continues bornées, défini par

$$D(A) = \{u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[); \frac{du}{dx} \in \mathcal{C}([0, +\infty[)\}, \quad Au = -\frac{du}{dx} + u^+,$$

montre que $\{u_0 \in D(A) : \text{il existe } u \text{ lipschitzienne de } [0, +\infty[\text{ dans } X, \text{ p.p. dérivable sur }]0, +\infty[\}$ n'est pas en général dense dans $D(A)$.

(*) Nous renvoyons à [10] pour une bibliographie sur ces résultats.

Le deuxième résultat fondamental pour l'étude de ce problème est dû à CRANDALL et LIGGETT [21] qui démontre que pour un opérateur accrétif A d'un espace de Banach quelconque et $u_0 \in \overline{D(A)}$, la "formule exponentielle" $(I + \frac{t}{n}A)^{-n}u_0$, lorsque l'on peut la définir, converge, uniformément pour t borné, lorsque $n \rightarrow +\infty$. Cette limite peut alors être considérée comme une solution du problème (1) (avec $f=0$), d'autant plus qu'auparavant BREZIS et PAZY [11] avaient démontré que s'il existe une fonction u lipschitzienne sur $[0, +\infty[$, p.p. dérivable sur $]0, +\infty[$ vérifiant (2), alors $(I + \frac{t}{n}A)^{-n}u_0$ converge vers u uniformément pour t borné.

Notre travail a consisté à caractériser cette "solution" indépendamment du procédé qui a permis de le construire. Le point de départ de notre théorie des solutions intégrales fut une caractérisation des solutions faibles dans le cas hilbertien : rappelons qu'étant donnée $f \in L^1(0, T; X)$, on appelle solution forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ toute solution u absolument continue de $[0, T]$ dans X , p.p. dérivable (fortement) sur $]0, T[$ et vérifiant $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. $t \in]0, T[$ on appelle alors solution faible (*) de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ toute fonction $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ telle qu'il existe $[u_n, f_n] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$ vérifiant u_n est solution forte de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0, T]; X)$, $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(0, T; X)$. Nous démontrons alors (cf. Proposition 3.6. de [9]) :

Soient A maximal monotone dans H espace de Hilbert et $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; H) \times L^1(0, T; H)$. Il y a équivalence entre les deux propriétés :

- i) u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$
- ii) $\forall [x, y] \in A, \forall 0 \leq s \leq t \leq T$

$$\frac{1}{2}|u(t)-x|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 + \int_s^t \langle f(\tau)-y, u(\tau)-x \rangle d\tau \quad (**)$$

La condition ii) implique en particulier

- iii) $\forall [x, y] \in A, \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$

(*) Cette notion a été introduite dans [5] et est très proche de la notion de "mild solution" introduite par BROWDER [14].

(**) $|\cdot|$ désigne la norme et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire.

$$\langle u(t)-u(s), u(s)-x \rangle \leq \int_s^t \langle f(\tau)-y, u(\tau)-x \rangle_s d\tau$$

les inégalités iii) ont été d'abord remarquées par BREZIS [7] et utilisées systématiquement dans [5] pour l'étude des solutions faibles.

Utilisant dans un espace de Banach quelconque le produit (*)

$$\langle y, x \rangle_s = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{|x+\lambda y|^2 - |x|^2}{2\lambda}$$

nous définissons la notion de solution intégrale :

Etant donnés A opérateur accréatif de X et $f \in L^1(0, T; X)$, on appelle solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ toute fonction $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ telle que

$$(3) \quad \begin{cases} \forall [x, y] \in A, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \frac{1}{2}|u(t)-x|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 + \int_s^t \langle f(\tau)-y, u(\tau)-x \rangle_s d\tau. \end{cases}$$

Notre travail est divisé en trois chapitres : au chapitre 0 nous introduisons les instruments de base dont nous nous servons : le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$, les opérateurs accréatifs, la divisibilité des fonctions à valeurs vectorielles ; au chapitre I nous étudions les solutions intégrables dans un cadre abstrait et enfin au chapitre II, nous appliquons ces résultats à deux équations d'évolution dans l'espace L^1 .

CHAPITRE 0. Préliminaires.

Il n'y a pas dans ce chapitre de résultats vraiment nouveaux. Pour le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ nous précisons surtout les relations de ce produit avec l'application de dualité. Pour les opérateurs accréatifs nous étudions de façon plus systématique le domaine généralisé $\hat{D}(A)$ introduit par CRANDALL [18] et la convergence de $A_\lambda x$ où A_λ est l'approximation Yosida de A . Enfin pour les fonctions à valeurs vectorielles, nous généralisons certains résultats que nous avons développés dans l'appendice de [10], étudiant en particulier la dérivabilité des fonctions absolument continues à valeurs dans un Banach non réflexif.

(*) Ce produit a été utilisé par de nombreux auteurs : citons SATO [36], CRANDALL et LIGGETT [21].

CHAPITRE I . Solutions intégrales.

Le résultat principal de ce travail est :

Soient A un opérateur accréatif de X et $f \in L^1(0, T; X)$. Si $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ est obtenu comme limite uniforme d'une approximation par discrétisation implicite (éventuellement à pas variable) de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, alors

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } [v, g] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X) \text{ tel que } v \text{ soit} \\ \text{solution intégrale de } \frac{dv}{dt} + Av \ni g, \text{ pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \frac{1}{2} |u(t) - v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u(s) - v(s)|^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_s d\tau. \end{array} \right.$$

La propriété (4) est très intéressante : nous appelons bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ toute fonction $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ vérifiant ces inégalités. Nous généralisons les résultats de [5] en étudiant la dérivabilité dans $\sigma(X'', X')$ d'une bonne solution u en un point t . Nous montrons que l'on peut appliquer aux bonnes solutions les techniques de prolongement classiques des solutions d'une équation différentielle, ce qui permet de démontrer :

Soit A un opérateur accréatif de X . Notons $S(A)$ la fermeture dans X de $\{y \in X; \forall x \in \hat{D}(A), \exists \lambda_n \rightarrow 0, \text{ tel que } \bigcap_n \overline{R(I + \lambda(A - y))} \text{ soit un voisinage de } x \text{ dans } \hat{D}(A)\}$ où $\hat{D}(A) = \{x; \exists [x_n, y_n] \subset A, x_n \rightarrow x, y_n \text{ borné}\}$. Pour tout $f \in L^1(0, T; S(A))$ et tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = u_0$ et donc, a fortiori, une solution intégrale unique de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$.

Lorsque $\overline{R(I + A)} = X$, $S(A) = X$. Nous montrons que la réciproque est vraie ce qui généralise les caractérisations faibles d'opérateur m -accréatif de KATO [24]. Nous obtenons d'autres résultats sur les perturbations lipschitziennes, les solutions périodiques, la caractérisation des solutions fortes par les solutions intégrales, etc ... Les propriétés de l'"opérateur bonne solution" fournissent des sortes de généralisations non-linéaires des théorèmes de HILLE-YOSIDA et de TROTTER :

Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{C}([0, \infty[; X) \times L^1_{loc}([0, \infty[; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe A m -accrétif tel que $[u, f] \in \mathcal{F}$ ssi u est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

ii) $\mathcal{F}$ vérifie

a) $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{C}([0, \infty[; X) \times L^1_{loc}([0, \infty[; X)$

b) Pour tout $h \geq 0$, $[u, f] \in \mathcal{F} \implies [u(\cdot + h), f(\cdot + h)] \in \mathcal{F}$

c) Pour tout $[u, f], [v, g] \in \mathcal{F}$, pour tout $0 \leq s \leq t \leq \infty$

$$\frac{1}{2} |u(t) - v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u(s) - v(s)|^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_s d\tau$$

d) Posant $C = \{u(0); u \in D(\mathcal{F})\}$, pour tout $f \in L^1_{loc}([0, \infty[; X)$ et tout $u_0 \in C$ il existe $u \in \mathcal{C}([0, \infty[; X)$ tel que $[u, f] \in \mathcal{F}$ et $u(0) = u_0$.

De plus alors A est unique et $\overline{D(A)} = C$.

Soient A_n et A des opérateurs m -accrétifs. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $(I + \lambda A_n)^{-1} \xi \rightarrow (I + \lambda A)^{-1} \xi$ pour tout $\xi \in X$ et tout $\lambda > 0$

ii) Pour tout $x \in \overline{D(A)}$ il existe $x_n \in \overline{D(A_n)}$ tel que $x_n \rightarrow x$;

et pour tout $[u_n, f_n]$ tel que u_n soit solution intégrale de

$$\frac{du_n}{dt} + A_n u_n \ni f_n, \quad f_n \rightarrow f \text{ dans } L^1(0, T; X), \quad u_n(0) \rightarrow u_0 \text{ avec}$$

$u_0 \in \overline{D(A)}$, on a u_n converge uniformément sur $[0, T]$ vers la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$.

Nous indiquons enfin diverses généralisations de la notion de solution intégrale.

CHAPITRE II. Equations d'évolution dans $L^1(\Omega)$.

Ω désignant un espace mesuré quelconque, un opérateur A de $L^1(\Omega)$ est accrétif ssi pour tout $[u, v], [\hat{u}, \hat{v}] \in A$, il existe $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\alpha(x) \in \text{sign}(u(x) - \hat{u}(x))$ p.p. $x \in \Omega$ et $\int \alpha(v - \hat{v}) \geq 0$, où

$$\text{sign } r = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ [1, +1] & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}, \text{ réservant la notation } \text{sign}_0 \text{ à la section de sign nulle pour } r = 0.$$

Nous introduisons une condition généralisant d'une certaine manière le principe du maximum : posant $P_0 = \{p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}); p(0) = 0, p' \text{ positif à support compact}\}$, nous disons que A vérifie la condition (M_0) ssi pour tout $[u, v] \in A$ et tout $p \in P_0$, $\int p(u)v \geq 0$.

Cette notion permet d'étudier une classe importante d'opérateurs. Nous donnons un certain nombre de résultats que l'on peut comparer aux résultats de Konishi [26], Brézis et Strauss [13]. Nous avons, depuis la rédaction de ce chapitre, obtenu d'autres résultats plus systématiques qui paraîtront ultérieurement.

Nous étudions ensuite deux équations d'évolution particulières :

A. Equations quasi-linéaires du premier ordre.

Il s'agit de l'équation

$$(5) \quad \begin{cases} u_t + \phi(u)_x = \psi & \text{sur }]0, T[\times \mathbb{R}^N \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^N$, $\psi :]0, T[\times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ et $u_0 : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ sont données.

Cette équation a été étudiée par beaucoup de mathématiciens.

Pour des données régulières, il existe des solutions locales du problème (5), mais en général à partir d'un certain temps t des discontinuités apparaissent. D'autre part pour une condition initiale discontinue, il n'y a pas unicité du problème (5) au sens faible

$$(6) \quad \int_{]0, T[\times \mathbb{R}^N} u f_t + \phi(u) f_x + \psi f + \int_{\mathbb{R}^N} u_0 f(0, \cdot) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^1([0, T[\times \mathbb{R}^N).$$

Ces phénomènes ont amené les mathématiciens à introduire des conditions sur les sauts.

Les plus anciennes sont celles de Rankine-Hugoniot ; d'autres conditions, équivalentes dans certaines classes de fonctions, ont été introduites par Hopf, Oleinik, Lax, Volpert, Kruskov etc... (*) Vous adoptons ici celles de Kruskov [30] et d'une manière plus générale nous posons :

(*) Nous renvoyons pour une bibliographie détaillée par exemple à [19]

Définition. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue, $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nous appellerons solution au sens de Kruskov de $\phi(u)_x = \psi$ sur Ω , toute fonction $u \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$(7) \quad \forall f \in D(\Omega), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \int \text{sign}_0(u-k)((\phi(u)-\phi(k))f_x + \psi f) \geq 0.$$

Remarquons alors que $\phi(u)_x = \psi$ au sens des distributions sur Ω . QUINN [35] remarqua que les solutions de (5) (avec $\psi=0$) définissaient un semi-groupe de contractions non linéaires sur $L^1(\mathbb{R}^N)$. CRANDALL [19] construit le générateur de ce semi-groupe non linéaire. Nous reprenons ici son travail en le précisant et en faisant le lien entre les solutions intégrales et les solutions considérées par Kruskov.

Etant donnée $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue, nous posons

$D_\phi = \{u \in L^1(\mathbb{R}^r) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) ; \text{il existe } \psi \in L^1(\mathbb{R}^N), \phi(u)_x = \psi \text{ au sens de Kruskov sur } \Omega\}$

et $A_\phi = u \in D_\phi \mapsto \phi(u)_x \in L^1$.

Nous montrons que si ϕ vérifie $\lim_{r \rightarrow 0} |\phi(r)| |r|^{\frac{1-N}{N}} = 0$ (lorsque $N=1$, cette condition se ramène à $\phi(0) = 0$, qui est seulement une normalisation de ϕ), alors

A_ϕ est accréitif dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et vérifie la condition (M_0) .

$R(I+A_\phi) \supset L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$

D_ϕ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (en supposant pour $N \geq 2$ qu'il existe $\alpha > \frac{N}{N+1}$ tel que $\lim_{r \rightarrow 0} |\phi(r)| r^{-\alpha} = 0$).

Sous ces conditions on peut définir pour tout $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\psi \in L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N)$ la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + A_\phi u = \psi$, $u(0) = u_0$. Utilisant les théorèmes généraux du chapitre I, nous montrons que pour tout $u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et tout $\psi \in L^1 \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$, il existe $u \in L^1 \cap L^\infty$ unique tel que

$$\begin{aligned} u_t + \phi(u)_x &= \psi \text{ au sens de Kruskov sur }]0, T[\times \mathbb{R}^N \\ u(t) &\rightarrow u_0 \text{ dans } L^1_{loc} \text{ lorsque } t \rightarrow 0 \text{ essentiellement} \end{aligned}$$

ce qui correspond exactement à la définition d'une solution de (5) selon Kruskov [30].

Nous obtenons d'autres propriétés sur la continuité par rapport à ϕ , sur la dérivabilité vague de u , sur le cas où ϕ est

localement lipchitzienne, et enfin sur le cas $N=1$ et ϕ est monotone généralisant les résultats de CRANDALL [20] .

B. Equation non linéaire du type "diffusion des gaz"

Il s'agit de l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \phi(u) = v \quad \text{sur }]0, T[\times \Omega, \quad - \frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{sur }]0, T[\times \Gamma, \\ u(0) = u_0 \quad \text{sur } \Omega$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord Γ régulier, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement croissante avec $\phi(0) = 0$, β est un graphe maximal monotone de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta(0)$, $v :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, et $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont donnés.

Cette équation a été étudiée notamment par LIONS [31] dans le cas $\phi(r) = |r|r$ et β graphe simple borné : il obtenait des théorèmes d'existence de solutions de (8) au sens faible. Nous l'étudions ici en la ramenant à une équation d'évolution dans $L^1(\Omega)$.

Nous posons $A_{\beta, \phi} = \{[u, v] \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) ; \phi(u) \in W^{1,1}(\Omega) \text{ et il existe } w \in L^1(\Gamma) \text{ tel que } w(x) \in \beta(u(x)) \text{ p.p. } x \in \Gamma \text{ et pour tout } f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \int_{\Omega} v f = \int_{\Omega} \phi(u)_x + \int_{\Gamma} w f\}$.

Nous montrons que

$A_{\beta, \phi}$ est accréitif et vérifie la condition (M_0)

$$\mathcal{R}(I + A_{\beta, \phi}) = L^1$$

$D(A_{\beta, \phi})$ est dense dans L^1

$A_{\beta, \phi}$ est continu par rapport à β, ϕ

On peut définir pour tout $u_0 \in L^1$ et tout $v \in L^1$ la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + A_{\beta, \phi} u = v$; $u(0) = u_0$, qui s'écrit :

pour tout $g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ tel que $\phi(g) \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ et $-\frac{\partial \phi(g)}{\partial \nu} \in \beta(g)$ p.p. sur Γ et pour tout $\gamma \in \mathcal{D}^+(]0, T[)$, il existe $\alpha \in L^1(]0, T[\times \Omega)$ tel que $\alpha \in \text{sign}(u-g)$ p.p. et

$$\int \alpha \{(u-g)\gamma' + (v + \Delta \phi(g))\gamma\} dx dt \geq 0.$$

Nous obtenons, en utilisant la continuité des solutions par rapport à ϕ , un certain nombre de résultats sur les solutions faibles de (8).

Mis à part le cas où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, ces résultats ne sont pas aussi satisfaisants que ceux obtenus dans le cas stationnaire^(*). Relevons le théorème d'existence et d'unicité :

supposant ϕ localement lipschitzienne et β partout défini, pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et tout $v \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$, il existe $u \in L^\infty([0, T[\times \Omega)$ unique vérifiant : $\phi(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$; $\sqrt{t} \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L^2([0, T[\times \Omega)$; il existe $w \in L^1([0, T[\times \Gamma)$ tel que $w \in \beta(u)$ p.p. et pour tout $f \in \mathcal{C}_0^1([0, T[\times \overline{\Omega})$ $\int u f_t + v f = \int \phi(u)_{xx} f_x + \int w f$; $u(t) \rightarrow u_0$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow 0$ essentiellement.

Nous obtenons pour un β quelconque des solutions de (5) sous forme d'inéquations variationnelles d'évolution ; nous étudions plus spécialement le cas $\phi(r) = |r|^{v-1} r$; enfin nous étudions la dérivabilité vague et la dérivabilité étroite de u .

-:-:-:-:-

(*) Nous avons depuis amélioré certains résultats qui paraîtront ultérieurement.

CHAPITRE 0. PRELIMINAIRES.

Nous donnons dans ce chapitre quelques instruments de base de la théorie que nous voulons développer.

1. Produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ et application de dualité.

Définition 0.1. Etant donnés x et y des éléments d'un espace vectoriel normé de norme $|\cdot|$, on pose

$$(1) \quad \langle y, x \rangle_s = \lim_{t \downarrow 0} \frac{|x+ty|^2 - |x|^2}{2t}.$$

Cette limite existe puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}|x+ty|^2$ est convexe. On a

$$(2) \quad \langle y, x \rangle_s = \inf_{t > 0} \frac{|x+ty|^2 - |x|^2}{2t}.$$

Notons que $\langle y, x \rangle_s$ ne dépend que du sous-espace vectoriel normé engendré par x et y .

Etant donné X un espace vectoriel normé, pour tout $t > 0$, l'application $[x, y] \mapsto \frac{|x+ty|^2 - |x|^2}{2t}$ est continue sur $X \times X$ et convexe en $y \in X$ pour tout $x \in X$; donc d'après (2)

$$(3) \quad \text{l'application } [x, y] \in X \times X \mapsto \langle y, x \rangle_s \text{ est s.c.s.}$$

et pour tout $x \in X$, l'application $y \mapsto \langle y, x \rangle_s$ est convexe d'après (1); puisque on a immédiatement $\langle \lambda y, x \rangle_s = \lambda \langle y, x \rangle_s$ pour $\lambda \geq 0$ et $\langle y, x \rangle_s \leq |y| |x|$,

$$(4) \quad \text{pour tout } x \in X, \text{ l'application } y \in X \mapsto \langle y, x \rangle_s \text{ est sous-linéaire continue.}$$

Définition 0.2. Soit X un espace vectoriel normé de dual X' . On définit l'application de dualité associée à la norme par

$$F : x \in X \mapsto F(x) = \{w \in X'; |w| = |x|, \langle x, w \rangle = |x| |w|\} \in \mathcal{P}(X').$$

D'après Hahn-Banach, pour tout $x \in X$, $F(x) \neq \emptyset$. On a même de façon plus précise :

Lemme 0.1. Soient X un espace vectoriel normé d'application de dualité F et $[x, y] \in X \times X$. Il existe $w \in F(x)$ tel que $\langle y, x \rangle_s = \langle y, w \rangle$.

En effet d'après Hahn-Banach, il suffit de démontrer que

$$\alpha |x|^2 + \beta \langle y, x \rangle_s \leq |\alpha x + \beta y| |x| \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

soit encore en posant $\lambda = \lim_{t \downarrow 0} \frac{|x+ty| - |x|}{t}$, puisque $\langle y, x \rangle_s = \lambda |y|$,

$$\alpha |x| + \beta \lambda \leq |\alpha x + \beta y| \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Or on a $t\lambda \leq |x+ty| - |x| \quad \forall t \in \mathbb{R}$, donc

$$\text{Pour } \alpha > 0, \quad \alpha |x| + \beta \lambda = \alpha \left[|x| + \frac{\beta}{\alpha} \lambda \right] \leq \alpha \left| x + \frac{\beta}{\alpha} y \right| = |\alpha x + \beta y|$$

$$\text{pour } \alpha = 0, \quad \beta \lambda \leq |x + \beta y| - |x| \leq |\beta y|$$

$$\begin{aligned} \text{pour } \alpha < 0, \quad \alpha |x| + \beta \lambda &= (-\alpha) \left[-|x| + \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \lambda \right] \leq (-\alpha) \left[-2|x| + \left|x - \frac{\beta}{\alpha} y\right| \right] \\ &\leq (-\alpha) \left| -x - \frac{\beta}{\alpha} y \right| = |\alpha x + \beta y|. \end{aligned}$$

On a immédiatement pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un convexe $\sigma(X', X)$ -compact et de plus F est demi-fermé, c'est-à-dire de graphe fermé dans $X \times \sigma(X', X)$. Ceci peut résulter aussi du

Lemme 0.2. Soit X un espace vectoriel normé. L'application de dualité est la sous-différentielle de la fonction convexe $\frac{1}{2} |\cdot|^2$.

En effet, si $w \in F(x)$, on a pour tout $y \in X$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |x+y|^2 - \frac{1}{2} |x|^2 &= |x+y| |x| - |x|^2 + \frac{1}{2} (|x+y| - |x|)^2 \\ &\geq |x+y| |w| - \langle x, w \rangle \geq \langle y, w \rangle. \end{aligned}$$

Réciproquement si pour tout $y \in X$, $\frac{1}{2} |x+y|^2 - \frac{1}{2} |x|^2 \geq \langle y, w \rangle$, on a $\langle y, w \rangle \leq \langle y, x \rangle_s \leq |y| |x|$ et donc $|w| \leq |x|$. Mais en prenant $y = tx$,

on a $\frac{(1+t)^2 - 1}{2} |x|^2 \geq t \langle x, w \rangle$; d'où en divisant par $t > 0$ (resp. $t < 0$)

et faisant $t \rightarrow 0$, $|x|^2 \geq \langle x, w \rangle$ (resp. $|x|^2 \leq \langle x, w \rangle$).

Ce lemme montre en particulier que F est monotone (même maximal cycliquement monotone); Notons enfin le

Lemme 0.3. Soient X un espace vectoriel normé et u une fonction définie au voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$, à valeurs dans X , faiblement dérivable en t_0 et telle que $\frac{1}{2}|u(\cdot)|^2$ soit dérivable en t_0 . Alors $\frac{d}{dt} \frac{1}{2}|u(t_0)|^2 = \langle u'(t_0), w \rangle$ pour tout $w \in F(u(t_0))$.

En effet d'après le lemme 2, pour $w \in F(u(t_0))$ fixée, on a pour tout h petit,

$$\frac{1}{2}|u(t_0+h)|^2 - \frac{1}{2}|u(t_0)|^2 \geq \langle u(t_0+h) - u(t_0), w \rangle.$$

D'où en divisant par $h > 0$ (resp. $h < 0$) et faisant $h \rightarrow 0$,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2}|u(t_0)|^2 \geq \langle u'(t_0), w \rangle \quad (\text{resp. } \frac{d}{dt} \frac{1}{2}|u(t_0)|^2 \leq \langle u'(t_0), w \rangle).$$

Nous pouvons maintenant donner la caractérisation.

Proposition 0.1. Soient X un espace vectoriel normé d'application de dualité F et ϕ une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\phi(x, y) = \langle y, x \rangle_s \quad \forall [x, y] \in X \times X$
- ii) $\phi(x, y) = \sup\{\langle y, w \rangle; w \in F(x)\} \quad \forall [x, y] \in X \times X$
- iii) Pour tout $[x, y] \in X \times X$, on a

a) Il existe $w \in F(x)$ tel que $\phi(x, y) = \langle y, w \rangle$

b) l'application $t \in [0, +\infty[\mapsto \phi(x+ty, y)$ est s.c.s. en 0.

Démonstration : D'après les lemmes 1 et 2, on a $i \iff ii) \implies iii)$.
Démontrons $iii) \implies i)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{2}|x+ty|^2$ est convexe, donc absolument continue ; d'après le lemme 3 et l'hypothèse a),

on a $\frac{d}{dt} \frac{1}{2}|x+ty|^2 = \phi(x+ty, y)$ p.p. $t \in \mathbb{R}$ et donc

$$\frac{|x+ty|^2 - |x|^2}{2t} = \frac{1}{t} \int_0^t \phi(x+\tau y, y) d\tau \quad \forall t > 0.$$

D'après l'hypothèse b), faisant $t \rightarrow 0$, on a $\langle y, x \rangle_s \leq \phi(x, y)$.
Mais d'après l'hypothèse a) et le lemme 2, $\phi(x, y) \leq \langle y, x \rangle_s$.

Remarque 0.1.

Le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ a été introduit par Crandall-Liggett [21] à partir de la caractérisation ii) de la Proposition 0.1.^(*) Nous serons amenés ultérieurement à considérer des sur-espaces vectoriels normés de X , par exemple le bidual X'' ; l'introduction du produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ à partir de la définition 0.1., montre explicitement l'invariance de $\langle y, x \rangle_s$ lorsque l'on plonge X dans un sur-espace, alors que l'application de dualité au point $x \in X$ peut être considérablement augmentée.

Remarquons que le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ détermine complètement l'application de dualité. On a en effet :

Lemme 0.4. Soient X un espace vectoriel normé, $x \in X$ et Σ une partie de $F(x)$ telle que pour tout $y \in X$, il existe $w \in \Sigma$ tel que $\langle y, x \rangle_s = \langle y, w \rangle$. Alors $F(x)$ est l'enveloppe convexe $\sigma(X', X)$ -fermée de Σ .

Puisque $F(x)$ est un convexe $\sigma(X', X)$ -compact, il suffit de vérifier que pour $a \in \mathbb{R}$ et $y \in X$, on a

$$(\mu + \langle y, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in \Sigma) \implies (\mu + \langle y, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in F(x)).$$

Or pour $w \in F(x)$ on a $\langle y, w \rangle \leq \langle y, x \rangle_s$, d'où le lemme.

Lorsque X est réflexif, on détermine facilement l'application de dualité de $L^p(S, B, \mu; X)$ ($1 \leq p < +\infty$), car l'on connaît bien son dual (cf. p.e. []). On l'obtiendra de la même manière lorsque X est séparable. Dans le cas général le problème me semble ouvert; par contre le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ est aisé à déterminer

Proposition 0.2. Soient X un espace de Banach, (S, B, μ) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. Dans l'espace $Y = L^p(S, B, \mu; X)$ le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ est défini par

$$\langle v, u \rangle_s = \int_{u \neq 0} \langle v(s), u(s) \rangle_s \frac{\|u\|_Y}{|u(s)|} d\mu(s) + \int_{u=0} |v(s)| \|u\|_Y d\mu(s) \quad \text{pour } p=1.$$

$$\langle v, u \rangle_s = \int_{u \neq 0} \langle v(s), u(s) \rangle_s \left(\frac{|u(s)|}{\|u\|_Y} \right)^{p-2} d\mu(s) \quad \text{pour } 1 < p < +\infty.$$

$$\text{En effet on a } \|u\|_Y^{p-2} \langle v, u \rangle_s = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|u+tv\|_Y^p - \|u\|_Y^p}{pt}$$

(*) cf. aussi SATO [36].

$$\text{soit } \|u\|_Y^{p-2} \langle v, u \rangle_s = \lim_{t \downarrow 0} \left\{ \int_{u \neq 0} \frac{|u(s) + tv(s)|^p - |u(s)|^p}{pt} d\mu(s) + \frac{t^{p-1}}{p} \int_{u=0} |v(s)|^p d\mu(s) \right\}$$

d'où la proposition par application du théorème de convergence dominée.

Nous serons amenés ultérieurement à effectuer des hypothèses de régularité sur la norme : dérivabilité, différentiabilité, stricte convexité, uniforme convexité, etc ... Rappelons les caractérisations

Proposition 0.3. Soit X un espace vectoriel normé ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) la norme est dérivable (au sens de Gâteaux) [resp. différentiable (au sens de Fréchet) ; resp. uniformément différentiable] sur la sphère unité.

ii) F est univoque (et donc demi-continu, i.e. continu de X dans $\sigma(X', X)$) [resp. et continu ; resp. et uniformément continu sur les bornés].

iii) il existe une section univoque F_0 de F vérifiant

$$\forall [x, y] \in X \times X, \langle y, F_0(x+ty) \rangle \rightarrow \langle y, F_0(x) \rangle \text{ lorsque } t \downarrow 0$$

[resp. continu ; resp. uniformément continu sur les bornés]

iv) l'application $[x, y] \mapsto \langle y, x \rangle_s$ est continue de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ [resp. se prolonge en une application continue de $X \times \sigma(X'', X')$ dans $\mathbb{R}$; resp. X' est uniformément convexe].

Démonstration : Par définition la norme est dérivable en $x \neq 0$ ssi l'application $y \mapsto \langle y, x \rangle_s$ est linéaire et donc d'après les lemmes 4 et 1, ssi $F(x)$ est réduit à un élément.

Supposons la norme différentiable en x , alors il existe $\gamma : [0, +\infty[\mapsto [0, +\infty]$ convexe telle que $\lim_{r \downarrow 0} \frac{\gamma(r)}{r} = 0$ et pour tout $y \in X$,

$$\frac{1}{2}|y|^2 \leq \frac{1}{2}|x|^2 + \langle y-x, F(x) \rangle + \gamma(|y-x|).$$

Par dualité on a pour tout $v \in X'$ (puisque $\frac{1}{2}|v|^2 = \sup_{y \in X} \langle y, v \rangle - \frac{1}{2}|y|^2$)

$$\frac{1}{2}|v|^2 \geq \frac{1}{2}|F(x)|^2 + \langle x, v-F(x) \rangle + \gamma^*(|v-F(x)|)$$

où $\gamma^*(r) = \sup_{t \in [0, +\infty[} (tr - \gamma(t))$. D'où si $v \in F(y)$,

$$\gamma^*(\|v - F(x)\|) \leq \langle y - x, v - F(x) \rangle \leq \|y - x\|(\|y\| + \|x\|).$$

Or (cf. Asplund [1], lemme 1), $\gamma^*(r) > 0$ si $r > 0$, donc $v \rightarrow F(x)$ lorsque $y \rightarrow x$.

Lorsque la norme est uniformément différentiable sur la sphère unité, γ est indépendant de x borné et donc F est uniformément continue sur les bornés, ce qui achève de démontrer l'implication i) $\Rightarrow$ ii).

L'implication ii) $\Rightarrow$ iii) est triviale. Supposons iii) vérifiée. D'après la Proposition 1, $\langle y, x \rangle_s = \langle y, F_0(x) \rangle$ pour tout $[x, y] \in X \times X$, et par conséquent $F = F_0$. Donc iii) $\Rightarrow$ ii). L'implication ii) $\Rightarrow$ i) est immédiate puisque

$$\frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle y - x, F(x) \rangle \leq \int_0^1 \langle y - x, F(tx + (1-t)y) - F(x) \rangle dt.$$

D'après le théorème de Smulian [37], la norme est uniformément différentiable sur la sphère unité ssi X' est uniformément convexe. Supposons la norme dérivable [resp. différentiable] sur la sphère unité alors l'application $[x, y] \mapsto \langle y, F(x) \rangle$ est continue de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ [resp. $X \times \sigma(X'', X')$ dans $\mathbb{R}$], d'où l'implication i) $\Rightarrow$ iv). Réciproquement supposons $[x, y] \in X \times X \mapsto \langle y, x \rangle_s \in \mathbb{R}$ continue ; alors la fonction $t \mapsto \frac{d}{dt} \frac{1}{2}\|x + ty\|^2 = \langle y, x + ty \rangle_s$ est continue et donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\|x + ty\|^2$ est dérivable en 0. Si l'on suppose qu'il existe un prolongement de $[x, y] \in X \times X \mapsto \langle y, x \rangle_s$ continue de $X \times \sigma(X'', X')$ dans $\mathbb{R}$, en particulier la norme sera dérivable et ce prolongement sera nécessairement $[x, y] \in X \times X'' \mapsto \langle y, F(x) \rangle$. Supposons F non continue en x ; alors il existe $\varepsilon > 0$, $y_n \rightarrow x$, $\|\xi_n\| = 1$ tels que $\langle \xi_n, F(y_n) - F(x) \rangle \geq \varepsilon$; soit n_i un ultra-filtre tel que $\xi_{n_i} \rightarrow \xi$ dans $\sigma(X'', X')$, on aurait $\langle \xi, F(x) - F(x) \rangle \geq \varepsilon$ ce qui est contradictoire. D'où l'implication iv) $\Rightarrow$ i).

Remarquons enfin que si X' est strictement convexe, la norme est dérivable, la réciproque étant vraie dans le cas réflexif.

2. Opérateurs accréatifs.

Un opérateur (multivoque) d'un ensemble X est une application de X dans $\mathcal{P}(X)$, ensemble des parties de X . On dit qu'un opérateur A est univoque si pour tout $x \in X$, Ax contient au plus un élément. Le domaine d'un opérateur A est l'ensemble $D(A) = \{x \in X; Ax \neq \emptyset\}$ et l'image de A est l'ensemble $R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax$.

Nous identifierons A avec son graphe dans $X \times X$, i.e. $\{[x, y] \in X \times X; y \in Ax\}$. Nous noterons A^{-1} l'opérateur de graphe, le symétrique de celui de A , i.e. $y \in A^{-1}x$ ssi $x \in Ay$; on a évidemment $D(A^{-1}) = R(A)$, $(A^{-1})^{-1} = A$. L'ensemble des opérateurs est ordonné par l'inclusion des graphes: $A \subset B$ ssi pour tout $x \in X$, $Ax \subset Bx$.

Si X est un espace vectoriel, étant donnés deux opérateurs A et B et λ, μ des scalaires, on définit $\lambda A + \mu B : x \in X \mapsto \lambda Ax + \mu Bx = \{\lambda a + \mu b; a \in Ax, b \in Bx\}$; on a évidemment $D(\lambda A + \mu B) = D(A) \cap D(B)$.

Définition 0.3. Soit X un espace vectoriel normé. On dit qu'un opérateur A de X est accréatif ssi $\forall [x_1, y_1] \in A, \forall [x_2, y_2] \in A, \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_s \geq 0$. En d'autres termes, A est accréatif ssi pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction (i.e. opérateur univoque lipschitzien de rapport 1). Compte tenu de la Proposition 0.1, A est accréatif ssi

$$\forall [x_1, y_1] \in A, \forall [x_2, y_2] \in A, \exists w \in F(x_1 - x_2), \langle y_1 - y_2, w \rangle \geq 0.$$

Nous noterons J_λ^A (ou simplement J_λ) l'opérateur $(I + \lambda A)^{-1}$ et A_λ l'opérateur $\frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda^A)$. On a immédiatement :

Lemme 0.5. Soit A opérateur accréatif de X .

- a) A_λ est univoque accréatif lipschitzien de rapport $\frac{2}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$;
- b) $A_\lambda \subset A J_\lambda^A$ pour tout λ ;
- c) $|A_\lambda x| \leq |Ax|^{(1)} \quad \forall x \in D(A_\lambda) \cap D(A), \forall \lambda > 0$;
- d) $A_{\lambda+\mu} = (A_\lambda)_\mu$ pour tout λ, μ ;
- e) $J_\lambda x \in J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda x \right) \quad \forall x \in D(J_\lambda), \forall \lambda > 0, \forall \mu$.

(1) Pour une partie non vide E de X , nous noterons $|E| = \inf\{|y|; y \in E\}$.

Nous noterons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}(C)$) l'ensemble des opérateurs accréatifs de X (resp. et de domaine contenu dans C) ; nous noterons $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}(C)$) l'ensemble des éléments maximaux (pour l'inclusion des graphes) de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}(C)$). Nous dirons qu'un opérateur A est maximal si $A \in \mathcal{M}(\overline{D(A)})$.

Définition 0.4. Etant donné $A \in \mathcal{A}$, on notera $\hat{A}$ l'opérateur de X'' défini par

$$\hat{A} = \{x \in \overline{D(A)} \mapsto \hat{A}x = \{z \in X''; \forall [\xi, \eta] \in A, \exists w \in F(\xi - x), \langle \eta - z; w \rangle \geq 0\}.$$

Notons que $\widehat{A+y} = \hat{A} + y$ pour tout $y \in X$. Si X est réflexif, $\hat{A} = A$ ssi A est maximal ; ce n'est plus vrai lorsque X n'est pas réflexif, même pour un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions linéaires.

Proposition 0.4. Soient A et $x \in X$. Posons $\Lambda = \{\lambda > 0; x \in D(J_\lambda)\}$ et supposons $0 \in \bar{\Lambda}$. Alors il y a équivalence entre :

- i) $x \in D(\hat{A})$;
- ii) il existe $z \in X''$, $\Lambda \cup \{[x, z]\}$ accréatif dans X'' ;
- iii) $\lim_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \downarrow 0}} |A_\lambda x| < +\infty$;

Alors de plus $|A_\lambda x| \uparrow |\hat{A}x|$ lorsque $\lambda \downarrow 0$, $\lambda \in \Lambda$ et

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{conv}}^\sigma(X'', X') \{A_\lambda x; 0 < \lambda < \varepsilon, \lambda \in \Lambda\} \subset (\hat{A}x)^o \quad (1).$$

Démonstration : L'implication i) $\implies$ ii) est immédiate. Supposons ii) vérifié ; étant donné $z \in X''$ tel que $A_1 = A \cup \{[x, z]\}$ soit accréatif, on a d'après le lemme 0.5.c), pour $\lambda \in \Lambda$,

$$|(A_1)_\lambda x| = |A_\lambda x| \leq |A_1 x| \leq |z|. \text{ D'où ii) } \implies \text{iii) }.$$

Supposons iii) vérifié. Soient $[\xi, \eta] \in A$ et $w \in F(\xi - x)$. Utilisant la monotonie de F , on a pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $v \in F(\xi - J_\lambda x)$,

$$\langle A_\lambda x, w \rangle \leq \langle A_\lambda x, v \rangle$$

et en utilisant l'accréativité de A et le lemme 0.5.b),

$$\forall \lambda \in \Lambda, \exists v \in F(\xi - J_\lambda x), \langle A_\lambda x, v \rangle \leq \langle \eta, v \rangle \leq \langle \eta, \xi - J_\lambda x \rangle_s$$

(1) Etant donnée une partie E de X'' , on pose $E^o = \{x \in E; |x| = |E|\}$

d'où pour tout $z \in \overline{\text{conv}}^{\sigma(X'', X')} \{A_\lambda x; 0 < \lambda < \varepsilon, \lambda \in \Lambda\}$

$$\langle z, w \rangle \leq \sup_{\substack{0 < \lambda < \varepsilon \\ \lambda \in \Lambda}} \langle \eta, \xi - J_\lambda x \rangle_s$$

or $|J_\lambda x - x| = \lambda |A_\lambda x|$, donc $J_\lambda x \rightarrow x$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \Lambda$;

d'où $x \in D(A)$ et, le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ étant s.c.s., pour tout

$$z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{conv}}^{\sigma(X'', X')} \{A_\lambda x; 0 < \lambda < \varepsilon, \lambda \in \Lambda\},$$

$$\langle z, w \rangle \leq \langle \eta, \xi - x \rangle_s.$$

Donc $z \in \hat{A}x$, ce qui démontre iii) $\Rightarrow$ i).

Il résulte d'autre part de la démonstration de ii) $\Rightarrow$ iii) que

$$|A_\lambda x| \leq |\hat{A}x|; \text{ d'autre part utilisant le lemme 0.5.d) et c),}$$

$$|A_\lambda x| \uparrow \text{ lorsque } \lambda \downarrow, \text{ d'où la fin de la Proposition.}$$

Remarque 0.2. L'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ iii) de la Proposition 4 est due à Crandall [18].

Corollaire 0.1. Supposons X réflexif strictement convexe [resp. uniformément convexe]. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $x \in X$ tels que $0 \in \bar{\Lambda}$ avec $\Lambda = \{\lambda > 0; x \in D(J_\lambda)\}$. Alors $x \in D(\hat{A})$ ssi $A_\lambda x$ converge faiblement [resp. fortement] vers un élément de $(\hat{A}x)^{\circ_\lambda}$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \Lambda$.

Remarque 0.3. En général, la partie $\hat{A}x$ n'est pas convexe et donc $(\hat{A}x)^{\circ}$ n'est pas réduit à un élément lorsque X est réflexif strictement convexe. C'est le cas si la norme est dérivable. Plus précisément, étant donné X un espace vectoriel normé, la norme est dérivable ssi pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $x \in D(\hat{A})$, $\hat{A}x$ est convexe.

En général l'opérateur $\hat{A}$ n'est pas fermé dans $X \times \sigma(X'', X')$; c'est le cas cependant si la norme est différentiable. Plus précisément $\hat{A}$ est fermé [resp. séquentiellement fermé] dans $X \times \sigma(X'', X')$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite généralisée [resp. toute suite]} \\ [x_i, y_i] \in X \times X'' \text{ convergeant vers } [x, y] \text{ dans } X \times \sigma(X'', X'), \\ \text{il existe } w \in F(x) \text{ tel que} \end{array} \right.$$

$$\overline{\lim} \langle y_i, x_i \rangle_s \leq \langle y, w \rangle_s.$$

Lorsque X est réflexif, cette condition exprime que le produit

$[x, y] \mapsto \langle y, x \rangle_s$ est s.c.s. [resp. séquentiellement s.c.s.] de $X \times \sigma(X, X')$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque X est à norme dérivable (non nécessairement réflexif), cette condition est équivalente à la différentiabilité de la norme. Remarquons que cette condition est évidemment vérifiée dans un espace de dimension finie ; elle l'est aussi dans l'espace c_0 , comme on pourra le vérifier facilement. Remarquons enfin que cette condition n'est pas vérifiée par tout espace réflexif : prenant $\mathbb{R}^3$ muni de la norme $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2} + |z|$ et l'espace $X = L^2(0, 1; \mathbb{R}^3)$, considérons $u_n(t) = (\cos nt, \sin nt, 0) \in X$, $u_n \rightarrow 0$ dans X et soit $v = (0, 0, 1)$; on a $\langle u_n, v \rangle_s = \int_0^1 \langle u_n(t), v \rangle_s dt$; or $F(v) = \{(\xi, \eta, 1) ; \xi^2 + \eta^2 \leq 1\}$ donc $\langle u_n(t), v \rangle_s = 1$.

Ces remarques nous amènent à poser pour $A \in \mathcal{A}$,

$$\hat{D}(A) = \{x \in X ; \exists x_n \in D(\hat{A}), x_n \rightarrow x, |\hat{A}x_n| \text{ borné} \}.$$

Proposition 0.5. Soit $A \in \mathcal{A}$, $x \in X$ tel qu'il existe $\lambda_n \downarrow 0$ tel que $\bigcap_n D(\mathcal{J}_{\lambda_n})$ soit un voisinage de x dans $\overline{D(A)}$. Alors $x \in \hat{D}(A)$ ssi $x \in D(\hat{A})$.

En effet, supposons $x \in \hat{D}(A)$, alors il existe $x_n \in D(\hat{A})$ tel que $x_n \rightarrow x$, $|\hat{A}x_n| \leq M$. On peut toujours supposer $x_n \in D(\mathcal{J}_{\lambda_k})$ $\forall n, k$. D'après la Proposition 0.4., $|\lambda_k x_n| \leq |\hat{A}x_n| \leq M$ et donc λ_k étant continue, $|\lambda_k x| \leq M$. D'après la Proposition 0.4., $x \in D(\hat{A})$.

3. Dérivabilité des fonctions à valeurs vectorielles.

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur $\mathcal{I}_0$.

A tout $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I}; X)$ on peut associer la distribution sur $\mathcal{I}_0$ à valeurs dans X :

$$\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}_0) \mapsto \int_{\mathcal{I}} \phi f \in X.$$

On identifiera $L^1_{loc}(\mathcal{I}; X)$ à un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathcal{I}_0); X)$, ce qui est justifié car

$$\int_{\mathcal{I}} \phi f = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}_0) \Rightarrow f = 0 \quad \text{l.p.}$$

On définit la dérivée-distribution de $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I}; X)$ par

$$\frac{df}{dt} : \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}_0) \mapsto - \int_{\mathcal{I}} \phi' f \in X.$$

Rappelons la caractérisation (cf. [10], Proposition A.6.)

Proposition 0.6. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I}; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\frac{df}{dt} \in L^1_{loc}(\mathcal{I}; X).$

ii) Il existe f_1 telle que $f_1 = f$ p.p. sur $\mathcal{I}_0$, continue sur $\mathcal{I}$, p.p. dérivable (fortement) sur $\mathcal{I}_0$, f'_1 localement intégrable sur $\mathcal{I}$ et

$$f_1(t) = f_1(s) + \int_s^t f'_1(\tau) d\tau \quad \forall s, t \in \mathcal{I}.$$

De plus alors f_1 est unique et $f'_1 = \frac{df}{dt}$ p.p. sur $\mathcal{I}_0$.

Soit Y un espace de Banach en dualité séparante avec X , i.e. muni d'une forme bilinéaire $[x, y] \in X \times Y \mapsto \langle x, y \rangle$ telle que pour tout $x \in X$, $|x| = \sup_{|y| \leq 1} \langle x, y \rangle$ et tout $y \in Y$, $|y| = \sup_{|x| \leq 1} \langle x, y \rangle$.

Cela revient au même de dire que Y est un sous-espace fermé de X' fort tel que la boule unité de Y soit $\sigma(X', X)$ -dense dans la boule unité de X' .

A tout $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I}; X)$ on peut aussi associer la "distribution"

$$\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}_0; Y) \mapsto \int_{\mathcal{I}} \langle f, \phi \rangle \in \mathbb{R}$$

et on peut identifier $L^1_{loc}(\mathcal{I}; X)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathcal{I}_0; X)$ car

$$\int_{\mathcal{I}} \langle f, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}_0; Y) \implies f = 0 \text{ p.p.}$$

On a la propriété de dualité généralisant le lemme A.3 de [10] :

Lemme 0.5. Soit $f \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \sup_{\substack{\phi \in \mathcal{D}([0, T[; Y) \\ \|\phi\|_{L^{p'}(0, T; X)} \leq 1}} \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \rangle dt.$$

Démonstration : Etant donné $M > 0$, il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions mesurables ne prenant qu'un nombre dénombrable de valeurs telle que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ p.p. $t \in]0, T[$ et $|f_n(t)| \leq |f(t)| + M$ p.p. $t \in]0, T[$. (Il suffit de considérer une suite (x_k) telle que $f(t) \in \{\overline{x_k}; k \geq 1\}$ p.p. $t \in]0, T[$ et de poser $f_n(t) = x_k$ sur $\{t; |f(t) - x_k| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(t) - x_i| > \frac{1}{n} \text{ pour } i=1, \dots, k-1\}$). On a pour une telle suite $\|f_n\|_{L^p(0, T; X)} \rightarrow \|f\|_{L^p(0, T; X)}$ et pour tout $\phi \in D(]0, T[; Y)$, $\int_0^T \langle f_n(t), \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \rangle dt$. Il suffit donc de démontrer le lemme avec f ne prenant qu'un ensemble dénombrable de valeurs, soit $f = x_k$ sur Δ_k .

D'autre part, étant donné $g \in L^{p'}(0, T; Y)$, il existe une suite $\phi_n \in D(]0, T[; Y)$ telle que $\|\phi_n\|_{L^{p'}(0, T; Y)} \leq \|g\|_{L^{p'}(0, T; Y)}$ et pour $p' \in [1, +\infty[$, $\phi_n \rightarrow g$ dans $L^{p'}(0, T; Y)$, pour $p' = +\infty$, $\phi_n(t) \rightarrow g(t)$ p.p. $t \in]0, T[$. (Il suffit de régulariser g). On a pour une telle suite $\int_0^T \langle f(t), \phi_n(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt$.

Il suffit donc de démontrer

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \sup_{\substack{g \in L^{p'}(0, T; Y) \\ \|g\|_{L^{p'}(0, T; Y)} \leq 1}} \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt.$$

Or étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $y_k \in Y$ tel que $|y_k| \leq 1$ et $\langle x_k, y_k \rangle \geq |x_k| |1 - \varepsilon|$.

Pour $p \in [1, +\infty[$ prenons $g = |x_k|^{p-1} y_k / \|f\|_{L^p(0, T; X)}^{p-1}$ sur Δ_k ;

on a $\|g\|_{L^{p'}(0, T; Y)} \leq 1$ et $\int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt \geq \|f\|_{L^p(0, T; X)}^{p-1} (1 - \varepsilon)$.

Pour $p = +\infty$, il existe k_0 tel que $|x_{k_0}| \geq \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} (1 - \varepsilon)$ et

$|\Delta_{k_0}| > 0$; prenons $g = \frac{y_{k_0}}{|\Delta_{k_0}|}$ sur Δ_{k_0} et 0 sur Δ_k pour $k \neq k_0$.

on a $\|g\|_{L^1(0, T; Y)} \leq 1$ et $\int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt \geq \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} (1 - \varepsilon)^2$.

D'où le lemme.

Définition 0.5. On dit qu'une fonction f de $[0, T]$ dans X est à variation bornée s'il existe une constante C telle que pour toute subdivision $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = T$,

$$\sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(a_{k-1})| \leq C.$$

Le plus petit C vérifiant les relations est la variation totale de f sur $[0, T]$. Nous noterons $VB(0, T; X)$ l'espace des fonctions à variation bornée sur $[0, T]$. Pour $f \in VB(0, T; X)$, nous poserons $v_f(t) =$ variation totale de f sur $[0, t]$.

Rappelons la caractérisation dont la démonstration est identique à celle de la Proposition A.5 de [10], compte tenu du lemme 0.5. :

Proposition 0.7. Soient $f \in L^1_{loc}(0, T; X)$ et C une constante. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\int_0^T \langle f(t), \phi'(t) \rangle dt \leq C \|\phi\|_{L^\infty(0, T; Y)} \quad \forall \phi \in D(]0, T[; Y)$
- ii) $\int_0^{T-h} |f(t+h) - f(t)| dt \leq Ch \quad \forall h \in]0, T[.$

iii) Il existe $f_1 \in VB(0, T; X)$, $v_{f_1}(T) \leq C$, telle que $f_1 = f$ p.p. sur $]0, T[.$

De plus on peut choisir f_1 continue à droite sur $[0, T[.$

Définition 0.6. On dit qu'une fonction f de $[0, T]$ dans X est absolument continue si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, pour toute suite d'intervalles $I_n =]\alpha_n, \beta_n[$ deux à deux disjoints tels que $\sum (\beta_n - \alpha_n) \leq \delta$, on ait $\sum |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| \leq \epsilon$.

Rappelons la caractérisation correspondant à la Proposition A.2 de [10] :

Proposition 0.8. Soit f une fonction de $[0, T]$ dans X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) f est absolument continue.
- ii) f est à variation bornée et v_f est absolument continue.
- iii) Il existe $g \in L^1(0, T)$ tel que

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_0^{T-h} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t) \right| dt = 0$$

Alors $g(t) = \frac{dv}{dt} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ p.p.t. $\in]0, T[$.

Rappelons aussi la caractérisation (Proposition A.7 de [10]).

Proposition 0.9. Soient $f \in L^1_{loc}(0, T; X)$, C constante et $1 < p < +\infty$,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\int_0^T \langle f(t), \phi'(t) \rangle dt \leq C \|\phi\|_{L^{p'}(0, T; Y)} \quad \forall \phi \in D([0, T]; Y)$

ii) $(\int_0^{T-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt)^{1/p} \leq Ch \quad \forall h \in]0, T[$.

iii) Il existe $g \in L^p(0, T)$ tel que

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_0^{T-h} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t) \right|^p dt = 0 \quad \text{et} \quad \|g\|_{L^p(0, T)} \leq C.$$

iv) Il existe f_1 absolument continue sur $[0, T]$, $\left\| \frac{dv}{dt} f \right\|_{L^p(0, T)} \leq C$ telle que $f_1 = f$ p.p. sur $]0, T[$.

Alors f_1 est unique.

Caractérisons enfin les fonctions à dérivée L^1 .

Proposition 0.10. Soit $f \in \mathcal{C}([0, T]; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)$.

ii) f est absolument continue sur $[0, T]$ et p.p. dérivable (fortement) sur $]0, T[$.

iii) f est absolument continue et p.p. $t \in]0, T[$, il existe ϕ filtre de $[0, T]$ convergeant vers t tel que

$$\bigcap_{\phi \in \phi} \left\{ \frac{f(t+h) - f(t)}{h} ; h \neq 0, t+h \in \phi \right\}^{\sigma(X'', X')} \subset X.$$

iv) $\forall y \in Y$, $t \mapsto \langle f(t), y \rangle$ est absolument continue et il existe $g \in L^1(0, T; X)$ tel que $g(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{conv}}^{\sigma(X, Y)} \left\{ \frac{f(t+h) - f(t)}{h} ; 0 < |h| < \varepsilon \right\}$ p.p.t. $\in]0, T[$.

Démonstration : L'implication i) $\Rightarrow$ ii) résulte de la Proposition 0.6. Les implications ii) $\Rightarrow$ iii) et ii) $\Rightarrow$ iv) sont immédiates.

. Démontrons iv) $\Rightarrow$ i). Soit $f_1(t) = f(0) + \int_0^t g(\tau) d\tau$.

Pour tout $y \in Y$, on a $\langle f_1(0), y \rangle = \langle f(0), y \rangle$ et

$$\frac{d}{dt} \langle f_1(t), y \rangle = \langle g(t), y \rangle \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, y \right\}; \text{ o.s. p.p.t.}$$

$\in]0, T[$. Or $\lim_{h \rightarrow 0} \langle \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, y \rangle$ existe et $= \frac{d}{dt} \langle f(t), y \rangle$ p.p.t.

$\in]0, T[$, donc $\langle f_1(t), y \rangle = \langle f(t), y \rangle \quad \forall t \in]0, T[$.

. Démontrons iii) $\Rightarrow$ ii). Soit X_0 le sous-espace fermé engendré par $f([0, T])$. Il existe Y_0 sous-espace fermé séparable de X_0' en dualité séparante avec X_0 (il suffit, étant donnée une suite $\{x_n\}$ dense de X_0 , de prendre $y_n \in F(x_n)$ et de considérer le sous-espace engendré par les $\{y_n\}$). Puisque f est absolument continue (à variation bornée suffisante), f est p.p. $\sigma(Y_0', Y_0)$ -dérivable sur $]0, T[$ (cf. le raisonnement de la Proposition A.1 de []). En un point $t \in]0, T[$ où f est $\sigma(Y_0', Y_0)$ -dérivable et telle qu'il existe ϕ filtre convergeant vers t tel que

$$\Gamma = \bigcap_{\phi \in \Phi} \overline{\left\{ \frac{f(t+h) - f(t)}{h} ; h \neq 0, t+h \in \phi \right\}}^{\sigma(X'', X')} \subset X, \text{ on a } \Gamma \text{ compact}$$

non vide de $\sigma(X_0, X_0')$, et donc aussi de $\sigma(Y_0', Y_0)$, donc

$\Gamma = \{f'(t)\}$. Donc f est p.p. $\sigma(X_0, Y_0)$ -dérivable ; sa dérivée f'

est mesurable et $|f'(t)| \leq \frac{d}{dt} v_f(t)$ p.p. $t \in]0, T[$, donc

$f' \in L^1(0, T; X_0)$. Utilisant l'implication iv) $\Rightarrow$ i), on a i).

Donnons d'abord quelques corollaires :

Corollaire 0.2. Soit f absolument continue sur $[0, T]$ telle que

$$\text{p.p.t.}, \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\left\{ \frac{f(t+h) - f(t)}{h} ; 0 < h < \varepsilon \right\}}^{\sigma(X'', X')} \subset X$$

alors $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)$.

Corollaire 0.3. Supposons X vérifiant: pour tout sous-espace X_0 séparable, il existe Y_0 en dualité avec X_0 tel que Y_0' soit séparable (c'est le cas si X est réflexif, c'est aussi le cas de $\lambda^1(I)$). Etant donnée $f \in C([0, T]; X)$, $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)$ ssi f est absolument continue.

Remarque 0.4. Il est classique que l'absolue continuité de f n'implique pas $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)$ dans un espace de Banach quelconque.

On a en particulier des exemples dans $\mathcal{C}_0(S)$ (S localement compact

non fini) et dans $L^1(S; B; \mu)$ (μ mesure non discrète). La propriété du Corollaire 0.3 caractérise-t-elle les espaces de Banach dans lesquels cette implication est vraie ? Même dans le cas où $X=Y'$ avec Y séparable, nous ne savons démontrer que l'implication $[f \text{ absolument continue} \implies \frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)]$ est équivalente à X séparable, ce qui semble probable. Notons que ce problème est alors identique à la propriété X non séparable $\implies$ il existe une fonction bornée Y -scalairement mesurable et non mesurable. En effet dans le cas $X=Y'$, la propriété $[f \text{ absolument continue} \implies \frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)]$ est équivalente à $[f \text{ lipschitzienne} \implies \frac{df}{dt} \in L^\infty(0, T; X)]$.

Notons la caractérisation concernant les fonctions numériques :

Proposition 0.11. Soit $f \in L^1_{loc}(0, T; \mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\exists u \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ tel que $-\int f \phi' \leq + \int u \phi \quad \forall \phi \in D^+(]0, T[)$.
- ii) $\exists v \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ tel que $f(t) - f(s) \leq \int_s^t v(\tau) d\tau$ p.p. $s, t \in]0, T[$, $s < t$.
- iii) Il existe g croissante de $]0, T[$ dans $\mathbb{R}$ et h absolument continue sur $[0, T]$ telles que $f(t) = h(t) - g(t)$ p.p. $t \in]0, T[$.
- iv) Il existe f_1 telle que $f_1 = f$ p.p., à variation bornée sur tout compact de $]0, T[$ et donc p.p.-dérivable sur $]0, T[$ et tel que $f_1'(t) - f_1'(s) \leq \int_s^t f_1'(\tau) d\tau \quad \forall 0 < s < t < T$.

Démonstration : Démontrons i) $\implies$ ii).

Soit ρ_n suite régularisante et posons $f_n(t) = \int_{1/n}^{T-1/n} \rho_n(t-s) f(s) ds$.

Alors $f_n \in D(]0, T[)$ et $f_n(t) \rightarrow f(t)$ p.p. $t \in]0, T[$. Pour $\phi \in D^+(]0, T[)$, on a

$$\begin{aligned} -\int f_n \phi' &= + \int f_n' \phi = - \int_0^T \phi'(t) \int_{1/n}^{T-1/n} \rho_n(t-s) f(s) ds dt \\ &= - \int_{1/n}^{T-1/n} f(s) \int_0^T \phi'(t) \rho_n(t-s) dt ds \\ &= - \int_{1/n}^{T-1/n} f(s) \int_0^T \phi'(s-t) \rho_n(t) dt ds \\ &= - \int_{1/n}^{T-1/n} f(s) \frac{d}{ds} \left(\int_0^T \phi(s-t) \rho_n(t) dt \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq + \int_{1/n}^{T-1/n} u(s) \int_0^T \phi(s-t) \rho_n(t) dt ds \\ &= + \int \phi(t) \int_{1/n}^{T-1/n} \rho_n(t-s) u(s) ds dt \end{aligned}$$

à condition que $\text{supp } \phi + \text{supp } \rho_n \subset]1/n, T-1/n[$. D'où en posant

$$u_n(t) = \int_{1/n}^{T-1/n} \rho_n(t-s) u(s) ds, \text{ on a } f'_n(t) \leq u_n(t) \text{ sur }]\frac{2}{n}, T-\frac{2}{n}[.$$

Soit alors $s, t \in]0, T[$ tels que $f_n(s) \rightarrow f(s)$, $f_n(t) \rightarrow f(t)$, $s \leq t$. On a

$$f(t) - f(s) = \lim f_n(t) - f_n(s) = \lim \int_s^t f'_n(\tau) d\tau \leq \overline{\lim} \int_s^t u_n(\tau) d\tau = \int_s^t u(\tau) d\tau$$

L'implication ii) $\Rightarrow$ iii) est immédiate ; il suffit de prendre $h(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$, on a $h(t) - f(t) \geq h(s) - f(s)$ p.p. $s, t \in]0, T[$, $s \leq t$.

En tout point $t \in]0, T[$, $\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t}} h(s) - h(t) = g(t)$ existe. On a

$$g(t) = h(t) - f(t) \text{ p.p. } t \in]0, T[.$$

L'implication iii) $\Rightarrow$ iv) est immédiate. Enfin iv) $\Rightarrow$ i) se démontre aisément ; soit $\phi \in D^+(]0, T[)$. On a

$$\begin{aligned} -\int f \phi' &= \lim_{h \rightarrow 0} \int f(t) \frac{\phi(t-h) - \phi(t)}{h} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \phi(t) dt \\ &\leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f'_1(\tau) d\tau \phi(t) dt = \int f'_1(t) \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Notons enfin la

Proposition 0.12. Soient $m \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^+)$ tels que

$$\frac{1}{2} \phi(t)^2 \leq \frac{1}{2} \phi(s)^2 + \int_s^t m(\tau) \phi(\tau) d\tau \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Alors pour tout $p \geq 1$,

$$\frac{1}{p} \phi(t)^p \leq \frac{1}{p} \phi(s)^p + \int_s^t m_0(\tau) \phi(\tau)^{p-1} d\tau \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

où $m_0(\tau) = m(\tau)$ si $\phi(\tau) > 0$ et 0 si $\phi(\tau) = 0$.

Démonstration : On a $\frac{1}{2} \phi(t)^2 \leq \frac{1}{2} \phi(s)^2 + \int_s^t |m(\tau)| \phi(\tau) d\tau$ et donc

d'après le Lemme A.5 de [10] $\phi(t) \leq \phi(s) + \int_s^t |m(\tau)| d\tau$ et

$\frac{1}{p} \phi(t)^p \leq \frac{1}{p} \phi(s)^p + \int_s^t \|\phi\|_{L^\infty}^{p-1} |m(\tau)| d\tau$. Donc d'après la Proposition

0.12, $\frac{1}{p} \phi(t)^p$ est à variation bornée et $\frac{1}{p} \phi(t)^p \leq \frac{1}{p} \phi(s)^p +$

$\int_s^t \frac{d}{dt} \frac{1}{p} \phi(\tau)^p d\tau$. On a $\frac{d}{dt} \frac{1}{p} \phi(t)^p = \phi(t)^{p-1} \frac{d}{dt} \phi(t)$. D'autre part
 $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \phi(t)^2 \leq m(t) \phi(t)$ p.p.t. Etant donné $t \in]0, T[$ où ϕ est
dérivable ; si $\phi(t) > 0$, on tire de $\phi(t) \frac{d\phi}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \phi(t)^2 \leq m(t) \phi(t)$
 $\frac{d\phi}{dt}(t) \leq m(t)$; si t est point d'accumulation de $\{\tau; \phi(\tau)=0\}$,
on a $\frac{d\phi}{dt}(t) = 0$; donc $\frac{d\phi}{dt}(t) \leq m_0(t)$ p.p.t $\in]0, T[$.

---:---:---:---

CHAPITRE I. SOLUTIONS INTEGRALES.

1. Définitions.

Définition 1.1. Soient A un opérateur de X , J un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur J_0 et $f \in L^1_{loc}(J; X)$. On appelle solution forte sur J de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, toute fonction $u \in \mathcal{C}(J; X)$ telle que

$$\frac{du}{dt} \in L^1_{loc}(J_0, X) \text{ et } \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) \text{ p.p. } t \in J_0.$$

On appelle solution faible sur J de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, toute fonction $u \in \mathcal{C}(J; X)$ telle qu'il existe $f_n \in L^1_{loc}(J; X)$, u_n solution forte sur J de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$ tels que

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^1_{loc}(J; X) \text{ et } u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}(J; X).$$

Remarque 1.1. La notion de solution forte telle qu'elle est définie ici est standard. La notion de solution faible a été introduite dans Bénéilan-Brézis [5]; notons qu'elle est très proche de la notion de "Mild-solution" introduite par Browder [14].

Lemme 1.1. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $f, g \in L^1_{loc}(J; X)$, u, v solutions faibles de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ respectivement. On a alors

$$(1) \quad \frac{1}{2} |u(t) - v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u(s) - v(s)|^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_s d\tau,$$

$$\forall s \leq t, s, t \in J$$

$$(2) \quad |u(t) - v(t)| \leq |u(s) - v(s)| + \int_s^t |f(\tau) - g(\tau)| d\tau, \forall s \leq t, s, t \in J$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} |u(t) - x|^2 \leq \frac{1}{2} |u(s) - x|^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle_s d\tau, \forall [x, y] \in A, \\ \forall s \leq t, s, t \in J$$

$$(4) \quad |u(t) - x| \leq |u(s) - x| + \int_s^t |f(\tau) - y| d\tau \quad \forall [x, y] \in A, \forall s \leq t, s, t \in J.$$

Les inégalités (3) et (4) sont des cas particuliers de (1) et (2) puisque $v \equiv x$ est solution forte sur $\mathbb{R}$ de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ avec $g \equiv y$. L'inégalité (2) se déduit de (1) en utilisant le résultat classique :

soient $\phi \in \mathcal{C}(\mathcal{J}; \mathbb{R}^+)$, $\psi \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J}; \mathbb{R}^+)$ tels que

$$\frac{1}{2}\phi(t)^2 \leq \frac{1}{2}\phi(s)^2 + \int_s^t \psi(\tau)\phi(\tau) d\tau \quad \text{pour tout } s \leq t, s, t \in \mathcal{J}, \text{ alors}$$

$$\phi(t) \leq \phi(s) + \int_s^t \psi(\tau) d\tau \quad \text{pour tout } s \leq t, s, t \in \mathcal{J}.$$

Enfin il suffit, le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ étant s.c.s., de démontrer (1) lorsque u et v sont solutions fortes. Alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2$ est continue sur $\mathcal{J}$ et absolument continue sur tout compact de $\mathcal{J}_0$. Utilisant le lemme 0.3 et l'accrétivité de A ,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 \leq \langle f(t)-g(t), u(t)-v(t) \rangle_s \quad \text{p.p. } t \in \mathcal{J}_0$$

d'où (1) en intégrant sur $[s, t]$.

Définition 1.2. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J}; X)$. On appelle solution intégrale sur $\mathcal{J}$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ toute fonction $u \in \mathcal{C}(\mathcal{J}; X)$ telle que le couple $[u, f]$ vérifie les inégalités (3).

D'après le lemme 1.1., toute solution faible est solution intégrale. D'après les inégalités (2), lorsque $\mathcal{J} = [0, T[$, il y a unicité de la solution faible sur $\mathcal{J}$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ prenant une valeur initiale $u(0)$ fixée. A priori il n'en est pas de même de la solution intégrale.

Remarquons d'autre part qu'étant donné un sur-espace X_1 de X , la notion de solution forte, faible ou intégrale est la même en considérant A comme opérateur de X_1 . La notion de solution forte ou faible ne dépend que de la topologie de X , alors que celle de solution intégrale dépend évidemment de la norme.

Remarquons que si $\mathcal{J}'$ est un intervalle contenu dans $\mathcal{J}$, toute solution forte, faible ou intégrale sur $\mathcal{J}$ est solution sur $\mathcal{J}'$. Ceci nous amène à introduire la notion suivante :

Définition 1.3. Soient $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{J}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J}; X)$. On appelle bonne solution sur $\mathcal{J}$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, toute fonction $u \in \mathcal{C}(\mathcal{J}; D(A))$ telle que pour tout sur-espace X_1 de X , pour tout intervalle $\mathcal{J}_1$ contenu dans $\mathcal{J}$, pour tout $[v, g] \in \mathcal{C}(\mathcal{J}_1; X_1) \times L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J}_1; X_1)$ vérifiant les inégalités (3) sur $\mathcal{J}_1$, on ait les inégalités (1) sur $\mathcal{J}_1$.

Puisque pour tout $[x, y] \in A$, $v \equiv x$ est solution intégrale de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ avec $g \equiv y$, toute bonne solution est solution intégrale.

Lorsque $J = [0, T[$, si u est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, u est l'unique solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ prenant la valeur $u(0)$ au point $t=0$.

Soient $A, B \in \mathcal{Q}$, $A \subset B$. Toute solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Bu \ni f$ est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$; toute bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Bu \ni f$. Les réciproques sont en général fausses; cependant si $B = \bar{A}$, fermeture de A dans $X \times X$, le produit $\langle ., . \rangle_s$ étant s.c.s., les réciproques sont vraies: u est solution intégrale [resp. bonne solution] de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ ssi u est solution intégrale [resp. bonne solution] de $\frac{du}{dt} + \bar{A}u \ni f$.

Soit $A \in \mathcal{Q}$ et supposons que pour tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe une bonne solution sur $[0, +\infty[$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ telle que $u(0) = x$. Notant $S(t)x$ cette solution (qui est unique), on a

- $S(t)$ applique $\overline{D(A)}$ dans $\overline{D(A)}$ pour tout $t \geq 0$;
- $S(0)x = x$ pour tout $x \in \overline{D(A)}$;
- $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ pour tout $x \in \overline{D(A)}$ et tout $t, s \geq 0$, puisque pour tout $s \geq 0$ la fonction $t \in [0, +\infty[\mapsto S(t+s)x$ est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$, $u(0) = S(s)x$;
- $\lim_{t \downarrow 0} |S(t)x - x| = 0$ pour tout $x \in \overline{D(A)}$;
- $|S(t)x - S(t)y| \leq |x - y|$ pour tout $x, y \in \overline{D(A)}$.

En d'autres termes, $S(t)$ est un semi-groupe continu de contractions non linéaires sur $\overline{D(A)}$.

Définition 1.4. Soit $A \in \mathcal{Q}$. Nous dirons que $-A$ est pseudo-générateur si pour tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe une bonne solution sur $[0, +\infty[$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ telle que $u(0) = x$. Le semi-groupe ainsi défini sera appelé le semi-groupe pseudo-engendré par A et noté $S^A(t)$. Etant donné $A \in \mathcal{Q}$, nous noterons $\Sigma(A)$ l'ensemble des $y \in X$ tels que $-A+y$ soit un pseudo-générateur.

Etant donné $A \in \mathcal{Q}$, $-A$ est pseudo-générateur ssi $\bar{-A}$ l'est et alors $S^A(t) = S^{\bar{A}}(t)$. Notons d'autre part que $\Sigma(A)$ est fermé. Enfin étant donné $\lambda \geq 0$, $\Sigma(\lambda A) = \lambda \Sigma(A)$ et $S^{\lambda A}(t) = S^A(\lambda t)$ si $-A$ est pseudo-générateur.

2. Propriétés des bonnes solutions.

Montrons d'abord que toute solution obtenue par la méthode des différences finies est une bonne solution.

Théorème 1.1. Soient $A \in \mathcal{A}$, $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1([0, T]; X)$. On suppose

qu'il existe une suite de partitions $\mathcal{P}_n = \{0 = a_0^n < a_1^n < \dots < a_{r_n}^n = T\}$,

des éléments $\{x_k^n; n \geq 1, k=0, \dots, r_n\}$ et $\{y_k^n; n \geq 1, k=1, \dots, r_n\}$

tels que $\frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{a_k^n - a_{k-1}^n} + Ax_k^n \geq y_k^n$ pour $n \geq 1, k=1, \dots, r_n$,

la suite de fonctions en escaliers f_n définie p.p. par $f_n = y_k^n$ sur $]a_{k-1}^n, a_k^n[$ converge vers f dans $L^1(0, T; X)$,

la suite de fonctions en escaliers u_n définie par $u_n(0) = x_0^n$; $u_n = x_k^n$ sur $]a_{k-1}^n, a_k^n]$ converge vers u uniformément.

Alors u est bonne solution sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \geq f$.

Démonstration : Puisque $x_k^n \in D(A)$ pour tout $n \geq 1, k=1, \dots, r_n$, on a $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0, T]$. Soient X_1 un sur-espace de X , $\mathcal{I}_1$ sous-intervalle de $[0, T]$ et $[v, g] \in \mathcal{C}(\mathcal{I}_1; X_1) \times L_{loc}^1(\mathcal{I}_1; X_1)$ tel que v soit solution intégrale de $\frac{dv}{dt} + Av \geq g$.

Posons $\lambda_k^n = a_k^n - a_{k-1}^n$ et fixons $s \leq t, s, t \in \mathcal{I}_1$.

Par définition d'une solution intégrale :

$$\frac{1}{2} |x_k^n - v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |x_k^n - v(s)|^2 + \int_s^t \left\langle y_k^n - \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{\lambda_k^n} - g(\tau), x_k^n - v(\tau) \right\rangle_s d\tau$$

or

$$\left\langle y_k^n - \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{\lambda_k^n} - g(\tau), x_k^n - v(\tau) \right\rangle_s \leq \left\langle y_k^n - g(\tau), x_k^n - v(\tau) \right\rangle_s + \frac{1}{2\lambda_k^n} |x_{k-1}^n - v(\tau)|^2 - \frac{1}{2\lambda_k^n} |x_k^n - v(\tau)|^2$$

d'où puisque $u_n(s) = x_k^n$ et $f_n(s) = y_k^n$ sur $]a_{k-1}^n, a_k^n]$,

$$\begin{aligned}
\int_{a_{k-1}^n}^{a_k^n} \frac{1}{2} |u_n(\sigma) - v(\tau)|^2 d\sigma &\leq \int_{a_{k-1}^n}^{a_k^n} \frac{1}{2} |u_n(\sigma) - v(s)|^2 d\sigma \\
&+ \int_{a_{k-1}^n}^{a_k^n} d\sigma \int_s^t \langle f_n(\sigma) - g(\tau), u_n(\sigma) - v(\tau) \rangle_s d\tau \\
&+ \frac{1}{2} \int_s^t \frac{1}{2} |x_{k-1}^n - v(\tau)|^2 d\tau - \int_s^t \frac{1}{2} |x_k^n - v(\tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Fixons $0 \leq \alpha \leq \beta \leq T$ et soient i_n, j_n tels que $a_{i_n}^n = \alpha_n \leq \alpha < a_{i_{n+1}}^n$ et $a_{j_{n+1}}^n < \beta \leq a_{j_n}^n = \beta_n$. Sommons les inégalités précédentes sur $k = i_{n+1}, \dots, j_n$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{1}{2} |u_n(\sigma) - v(t)|^2 d\sigma &\leq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{1}{2} |u_n(\sigma) - v(s)|^2 d\sigma \\
&+ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\sigma \int_s^t \langle f_n(\sigma) - g(\tau), u_n(\sigma) - v(\tau) \rangle_s d\tau \\
&+ \int_s^t \frac{1}{2} |x_{i_n}^n - v(\tau)|^2 d\tau - \int_s^t \frac{1}{2} |x_{j_n}^n - v(\tau)|^2 d\tau
\end{aligned}$$

d'où à la limite puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ est s.c.s. :

$$\begin{aligned}
(5) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} |u(\sigma) - v(t)|^2 d\sigma &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} |u(\sigma) - v(s)|^2 d\sigma \\
&+ \int_{\alpha}^{\beta} d\sigma \int_s^t \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau) \rangle_s d\tau \\
&+ \int_s^t \frac{1}{2} |u(\alpha) - v(\tau)|^2 d\tau - \int_s^t \frac{1}{2} |u(\beta) - v(\tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

On achève alors en utilisant le lemme :

Lemme 1.2. Soient $\mathcal{J}$ un intervalle, $[u, f], [v, g] \in \mathcal{C}(\mathcal{J}; X) \times L_{loc}^1(\mathcal{J}; X)$ vérifiant les inégalités (5) pour tout $s \leq t$, $\alpha \leq \beta$, $s, t, \alpha, \beta \in \mathcal{J}$. Alors les couples $[u, f], [v, g]$ vérifient les inégalités (1).

Démonstration : On peut toujours prendre $\mathcal{J} = [0, T]$. Posons

$$\phi(\sigma, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} |u(\sigma) - v(\tau)|^2 & \text{si } [\sigma, \tau] \in \mathcal{J} \times \mathcal{J} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\psi(\sigma, \tau) = \begin{cases} \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau) \rangle_s & \text{si } [\sigma, \tau] \subset J \times J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Régularisons : soient $\rho \in D(\mathbb{R})$, $\rho \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset [-1, +1]$, ρ pair, ρ décroissante sur $[0, +\infty[$ et $\int \rho(\xi) d\xi = 1$. Posons $\rho_n(\xi, \eta) = n^2 \rho(n\xi) \rho(n\eta)$ et $\phi_n = \rho_n * \phi$, $\psi_n = \rho_n * \psi$.

On a pour $\frac{1}{n} \leq \alpha \leq \beta \leq T$ et $\frac{1}{n} \leq s \leq t \leq T$, d'après (5),

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{\phi_n(\sigma, t) - \phi_n(\sigma, s)\} d\sigma + \int_s^t \{\phi_n(\beta, \tau) - \phi_n(\alpha, \tau)\} d\tau \leq \int_{\alpha}^{\beta} d\sigma \int_s^t \psi_n(\sigma, \tau) d\tau$$

et donc pour $[\sigma, \tau] \subset]\frac{1}{n}, T[\times]\frac{1}{n}, T[$,

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \tau}(\sigma, \tau) + \frac{\partial \phi_n}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \leq \psi_n(\sigma, \tau).$$

D'où, pour $\frac{1}{n} \leq s \leq t \leq T$,

$$\phi_n(t, t) \leq \phi_n(s, s) + \int_s^t \psi_n(\tau, \tau) d\tau$$

et à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\phi(t, t) \leq \phi(s, s) + \int_s^t \psi(\tau, \tau) d\tau, \quad \forall \sigma \leq s \leq t \leq T.$$

Corollaire 1.1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $R(I + \lambda A) \supset D(A)$ pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit. Alors $-A$ est pseudo-générateur et $S^A(t)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I + \frac{t}{n}A)^{-n}x$ pour tout $x \in D(A)$, la convergence étant uniforme pour $t \geq 0$ borné.

En effet d'après Crandall-Liggett [21], $(I + \frac{t}{n}A)^{-n}x$ converge uniformément pour t borné et la limite est la même que celle de $(I + \frac{A}{n})^{-[nt]}x$ ($[\alpha]$ désignant la partie entière de α). D'après le théorème 1.1., cette limite est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$.

Proposition 1.1. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $f \in L^1_{loc}(J; X)$. Toute solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ est bonne solution.

Démonstration : Il suffit de démontrer que l'on a les inégalités (1) pour u solution forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ et v solution intégrale de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$. Pour $s \leq t$; $s, t \in J$, on a par définition de solution

intégrale et solution forte :

$$\frac{1}{2}|u(\sigma)-v(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|u(\sigma)-v(s)|^2 + \int_s^t \langle f(\sigma) - \frac{du}{dt}(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau) \rangle_s d\tau$$

$$p.p. \sigma \in \mathcal{J}_0.$$

$$\text{Or } \langle f(\sigma) - \frac{du}{dt}(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau) \rangle_s$$

$$\leq \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau) \rangle_s - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(\sigma) - v(\tau)|^2 \quad p.p. \sigma, p.p. \tau$$

donc en intégrant sur $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{J}$,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} |u(\sigma) - v(t)|^2 d\sigma &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} |u(\sigma) - v(s)|^2 d\sigma \\ &+ \int_{\alpha}^{\beta} d\sigma \int_s^t \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau) \rangle_s d\tau + \int_s^t \frac{1}{2} |u(\alpha) - v(\tau)|^2 d\tau \\ &- \int_s^t \frac{1}{2} |u(\beta) - v(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

D'où la Proposition en utilisant le lemme 1.2.

Donnons des propriétés ponctuelles. Introduisons d'abord les notations :

Notation 1.1. Soient d'abord $u \in \mathcal{C}([0, T[; X)$ et $t \in [0, T[$, on posera

$$D^+ u(t) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\text{conv}}^{\sigma(X'', X')} \left\{ \frac{u(t+h) - u(t)}{h} ; 0 < h < \epsilon \right\}.$$

$$\text{Si } \lim_{h \downarrow 0} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty, D^+ u(t) \neq \emptyset.$$

Si $\lim_{h \downarrow 0} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty$, $D^+ u(t)$ est un convexe $\sigma(X'', X')$ -compact; il est réduit à un point ssi u est (X'', X') -dérivable à droite en t .

Notation 1.2. Soient $f \in L^1(0, T; X)$ et $t \in [0, T[$. On dit que t est point de Lebesgue à droite de f s'il existe $y \in X$ tel que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau) - y| d\tau = 0. \text{ La valeur } y \text{ est alors unique et égale à}$$

$$f(t+0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau) d\tau. \text{ Rappelons que l'ensemble des points de}$$

Lebesgue, et donc a fortiori des points de Lebesgue à droite de f est de complémentaire négligeable.

Théorème 1.2. Soient $A \in \mathcal{A}$, $f \in L^1(0, T; X)$, u bonne solution de

$\frac{du}{dt} + Au \ni f$, t point de Lebesgue à droite de f . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

$$i) \quad u(t) \in D(\hat{A})$$

$$ii) \quad D^+u(t) \neq \emptyset$$

$$iii) \quad \overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} < +\infty.$$

De plus alors $\frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \rightarrow |\hat{A}u(t)-f(t+0)|$ lorsque $h \rightarrow 0$, $h>0$ et $D^+u(t) \subset (f(t+0)-\hat{A}u(t))^0$.

Démonstration : Supposons $u(t) \in D(\tilde{A})$ et soit $z \in f(t+0)-\hat{A}u(t)$. Puisque $v \equiv u(t)$ est solution intégrale de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ avec $g \equiv f(t+0)-z$, on a d'après (2),

$$\frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau)-f(t+0)+z| d\tau$$

et donc

$$\overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \leq |z|.$$

D'où $i) \Rightarrow iii)$ et $\overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{|u(t+h)-u(t)|}{h} \leq |f(t+0)-\hat{A}u(t)|$.

L'implication $iii) \Rightarrow ii)$ est évidente. Supposons $ii)$ vérifié et soit $z \in D^+u(t)$. Fixons $[\xi, \eta] \in A$ et $w \in F(u(t)-\xi)$. On a alors pour $h>0$,

$$\langle \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, w \rangle \leq \frac{1}{2h} |u(t+h)-\xi|^2 - \frac{1}{2h} |u(t)-\xi|^2 \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \langle f(\tau)-\eta, u(\tau)-\xi \rangle_s$$

d'où le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ étant s.c.s.,

$$\langle z, w \rangle \leq \langle f(t+0)-\eta, u(t)-\xi \rangle_s.$$

Donc $z \in f(t+0)-\hat{A}u(t)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Notons le cas particulier :

Corollaire 1.2. Supposons X réflexif strictement convexe [resp. uniformément convexe]. Avec les hypothèses du théorème 1.2., les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$i) \quad u(t) \in D(\hat{A})$$

$$ii) \quad u \text{ est faiblement [resp. fortement] dérivable à droite en } t.$$

Alors $\frac{d^+u}{dt}(t) \in (f(t+0)-\hat{A}u(t))^0$.

Remarque 1.2. Les hypothèses sur la norme de X sont nécessaires pour

obtenir l'équivalence du corollaire 1.2. Plus précisément supposons X non strictement convexe, alors il existe $A \in \mathcal{A}$, u solution forte sur $[0, +\infty[$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ tels que $u(0) \in D(A)$ et $D^+u(0)$ non réduit à un point. Soit en effet $\{\lambda x + (1-\lambda)y; \lambda \in [0,1]\}$ un segment de la sphère unité et ϕ une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $|\phi'(t)| \leq 1$ et non dérivable en 0 ; considérant $u(t) = t(\frac{y+x}{2}) + \phi(t)(\frac{y-x}{2})$ et A la fermeture de $\{[u(t), -u'(t)]; t \in]0, +\infty[\}$ on vérifie facilement qu'ils satisfont aux conditions cherchées.

Remarque 1.3. Dans la démonstration du théorème 1.2., pour l'implication ii) $\Rightarrow$ i), nous avons seulement utilisé la propriété u est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ et même la propriété plus faible

$$(6) \quad \langle u(t) - u(s), u(s) - x \rangle_s \leq \int_s^t \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle_s d\tau \quad \forall s \leq t, s, t \in J, \forall [x, y] \in A.$$

Pour l'implication i) $\Rightarrow$ iii), nous avons seulement utilisé

$$(7) \quad |u(t) - x| \leq |u(s) - x| + \int_s^t |f(\tau) - y| d\tau \quad s \leq t, s, t \in J, \forall [x, y] \in \hat{A}.$$

Définition 1.5. Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous dirons que A est complètement maximal si $A = \hat{A}$. Lorsque X est réflexif, A est complètement maximal ssi A est maximal. La proposition suivante montre que l'on peut avoir des opérateurs complètement maximaux dans des espaces non réflexifs.

Proposition 1.2. Supposons X à norme dérivable. Soit A un opérateur univoque partout défini hemicontinu (i.e. pour tout $x, y \in X$, $A(x+ty) \rightarrow Ax$ lorsque $t \rightarrow 0$). Alors A est complètement maximal.

Démonstration : Soit $z \in \hat{A}x$. Pour tout $\xi \in X$, $\langle z - A\xi, F(x - \xi) \rangle \geq 0$. Prenant $\xi = x + tu$, divisant par $t > 0$ et $t < 0$ et faisant $t \rightarrow 0$, on a $\langle z - Ax, F(u) \rangle = 0$ pour tout $u \in X$. Or d'après un théorème de Bishop-Phelps [6], $F(X)$ est fortement dense dans X' , donc $z = Ax$.

Problème. Cette proposition se généralise-t-elle à un espace quelconque ?

On a alors en reprenant la démonstration du théorème 1.2. :

Proposition 1.3. Soient $A \in \mathcal{A}$ complètement maximal, $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; D(A)) \times L^1(0, T; X)$ avec u solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, t point de Lebesgue à droite de f . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$i) \quad u(t) \in D(A)$$

$$ii) \quad D^+u(t) \neq \emptyset.$$

$$iii) \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty.$$

De plus alors $\frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} \rightarrow |Au(t) - f(t+0)|$ lorsque $h \rightarrow 0$

$$\text{et } D^+u(t) \subset (f(t+0) - Au(t))^0.$$

En particulier si A est univoque ou X strictement convexe, u est faiblement dérivable à droite en t .

Remarque 1.4. Lorsque l'on suppose la norme différentiable, on peut obtenir des propriétés sur la dérivée à gauche généralisant les résultats de Bénéilan-Brézis [5] :

Proposition 1.4. Supposons la norme de X différentiable. Soient

$A \in \mathcal{A}$, $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$, u bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $t \in]0, T[$ tel que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{|u(t) - u(t-h)|}{h} + \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |f(\tau)| d\tau < +\infty. \text{ Alors } u(t) \in D(\hat{A}).$$

Si de plus t est point de Lebesgue à gauche de f ,

$$D^-u(t) \subset f(t-0) - \hat{A}u(t).$$

Démonstration : On a $\langle u(t) - u(t+h), F(u(t+h) - x) \rangle$

$$\leq \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \langle f(\tau) - y, F(u(\tau) - x) \rangle d\tau.$$

Il existe $h_n \downarrow 0$ tel que $\frac{u(t) - u(t-h_n)}{h_n} \rightarrow z$ dans $\sigma(X'', X')$,

$$\frac{1}{h_n} \int_{t-h_n}^t |f(\tau)| d\tau \text{ borné et } \frac{1}{h_n} \int_{t-h_n}^t f(\tau) d\tau \rightarrow \alpha \text{ dans } \sigma(X'', X').$$

$$\text{On a } \left| \frac{1}{h_n} \int_{t-h_n}^{t+h_n} \langle f(\tau) - y, F(u(\tau) - x) \rangle d\tau - \langle \alpha - y, F(u(t) - x) \rangle \right|$$

$$\leq \left| \langle \frac{1}{h_n} \int_{t-h_n}^{t+h_n} f(\tau) d\tau - \alpha, F(u(t) - x) \rangle \right| + \left\{ \frac{1}{h_n} \int_{t-h_n}^{t+h_n} |f(\tau)| d\tau + |y| \right\} \sup_{\tau \in [t-h_n, t+h_n]} |F(u(\tau) - x) - F(u(t) - x)|,$$

$$|F(u(\tau) - x) - F(u(t) - x)|,$$

$$\text{donc } \frac{1}{h_n} \int_{t-h_n}^t \langle f(\tau) - y, F(u(\tau) - x) \rangle d\tau \rightarrow \langle \alpha - y, F(u(t) - x) \rangle$$

$$\text{d'autre part } \langle \frac{u(t) - u(t-h_n)}{h_n}, F(u(t-h_n) - x) \rangle \rightarrow \langle z, F(u(t) - x) \rangle$$

$$\text{donc } \langle \alpha - z - y, F(u(t) - x) \rangle = 0.$$

Notons enfin la caractérisation :

Proposition 1.5. Soient $A \in \mathcal{A}$ maximal [resp. complètement maximal],
 $\mathcal{J}$ un intervalle $[u, f] \in \mathcal{C}(\mathcal{J}; \overline{D(A)}) \times L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J}; X)$ tel que
 $\frac{du}{dt} \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J}_0; X)$ [resp. u est absolument continue sur tout compact
de $\mathcal{J}_0$]. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) u est solution forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$
- ii) u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$
- iii) u est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$
- iv) u est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$
- v) $[u, f]$ vérifie les inégalités (6) .

$$\text{Alors } \frac{du}{dt}(t) \in (Au(t) - f(t))^{\circ} \text{ p.p.t} \in \mathcal{J}_0.$$

Démonstration : On a immédiatement $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow v)$. Supposons $v)$ vérifié. Lorsque A est maximal, en un point de Lebesgue à droite de f où u est faiblement dérivable à droite, en reprenant la démonstration $ii) \Rightarrow i)$ du théorème 1.2., on a $\frac{d^+u}{dt}(t) \in (f(t+0) - Au(t))^{\circ}$; donc si $\frac{du}{dt} \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J}_0; X)$, $\frac{du}{dt}(t) \in (f(t) - Au(t))^{\circ}$ p.p.t $\in \mathcal{J}_0$. Lorsque A est complètement maximal, en un point de Lebesgue à droite de f où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty$, en reprenant la démonstration $ii) \Rightarrow i)$ du théorème 1.2., on a $D^+u(t) \subset (f(t+0) - Au(t))^{\circ}$; donc si u est absolument continue sur tout compact de $\mathcal{J}_0$, $D^+u(t) \subset X$ p.p.t $\in \mathcal{J}_0$ et d'après le corollaire 0.2., $\frac{du}{dt} \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J}_0; X)$.

Lorsque f est à variation bornée, on a

Proposition 1.6. Soient $A \in \mathcal{A}$, $f \in \text{VB}(0, T; X)$ et u une bonne solution sur $[0, T[$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$i) \quad u(0) \in D(\hat{A})$$

ii) u est lipschitzienne.

Alors $u(t) \in D(\hat{A})$ pour tout $t \in [0, T[$

$u(T) = \lim_{t \rightarrow T} u(t)$ existe et est dans $\hat{D}(A)$

$\|u\|_{\text{Lip}} \leq |f_1(0) - \hat{A}u(0)| + v(f_1; [0, T[)$ et la fonction $t \mapsto |f_1(t) - \hat{A}u(t)| - v(f_1; [0, t])$ est croissante où f_1 est le représentant continu à droite de f .

Démonstration : Supposons u lipschitzienne alors d'après le théorème 1.2., $u(t) \in D(\hat{A})$ pour tout $t \in [0, T[$ et

$|f_1(t) - \hat{A}u(t)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h}$. D'autre part $u(T)$ existe et puisque f_1 et $|f_1 - \hat{A}u|$ sont bornés, $u(T) \in \hat{D}(A)$.

Posons $v(t) = v(f_1; [0, t])$. Pour $h \in]0, T[$, la fonction $t \mapsto u(t+h)$ est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni \bar{f}$ avec $\bar{f}(t) = f(t+h)$, donc pour $0 \leq s \leq t \leq t+h \leq T$,

$$\begin{aligned} |u(t+h) - u(t)| &\leq |u(s+h) - u(s)| + \int_s^t |f(\tau+h) - f(\tau)| d\tau \leq |u(s+h) - u(s)| \\ &\quad + \int_t^{t+h} v(\tau) d\tau - \int_s^{s+h} v(\tau) d\tau \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto |u(t+h) - u(t)| - \int_t^{t+h} v(\tau) d\tau$ est décroissante.

En particulier si $u(0) \in D(\hat{A})$, d'après le théorème 1.2., $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|u(h) - u(0)|}{h} < +\infty$ et donc u est lipschitzienne et la fonction

$$t \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\tau) d\tau = |f_1(t) - \hat{A}u(t)| - v(t)$$
 est

décroissante. Enfin $\|u\|_{\text{Lip}} = \left\| \frac{dv(u; [0, t])}{dt} \right\|_{L^\infty} = \|f_1 - Au\|_{L^\infty}$

$$\leq |f_1(0) - \hat{A}u(0)| + \lim_{t \rightarrow T} v(t).$$

Appliquons ces résultats aux semi-groupes.

Proposition 1.7. Soit $A \in \mathcal{A}$. Supposons que pour tout $x \in \hat{D}(A)$, il existe $T > 0$ et u une bonne solution sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ telle que $u(0) = x$. Alors $-A$ est pseudo-générateur. Posant

$S(t) = S^A(t)$, on a

- $D(\hat{A}) = \{x \in \overline{D(A)} ; \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{conv}}^\sigma(X'', X') \{ \frac{x - S(t)x}{t} ; 0 < t < \varepsilon \} \neq \emptyset\}$,
- pour tout $x \in D(\hat{A})$, $|\hat{A}x| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|x - S(t)x|}{t}$, $S(t)x \in D(\hat{A})$ pour tout $t \geq 0$ et $t \mapsto |\hat{A}u(t)|$ est décroissante.
- Lorsque A est complètement maximal, pour tout $x \in D(A) = D(\hat{A})$, $u(t) = S(t)x$ est solution forte de $\frac{du}{dt} + (Au)^0 \ni 0$.
- Lorsque X est réflexif strictement convexe [resp. uniformément convexe], $D(\hat{A})$ est le domaine du générateur infinitésimal faible [resp. fort], i.e. $\{x \in \overline{D(A)} ; \frac{x - S(t)x}{t} \text{ converge faiblement [resp. fortement]}\}$, et le générateur infinitésimal faible [resp. fort] est une section de $\hat{A}^0$.

Démonstration : Il suffit de démontrer que $-A$ est pseudo-générateur, les propriétés de $S^A(t)$ étant des corollaires immédiats des propositions 1.3. et 1.5. Soit alors $x \in D(\hat{A})$, $T = \sup\{t \geq 0 ; \text{il existe une bonne solution sur } [0, t] \text{ de } \frac{du}{dt} + Au \ni 0 \text{ telle que } u(0) = x\}$. D'après l'hypothèse $T > 0$, il est immédiat qu'il existe une bonne solution u sur $[0, T[$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$, $u(0) = x$. Si $T < +\infty$, d'après la proposition 1.5. $u(T) = \lim_{t \rightarrow T} u(t)$ existe et $u(T) \in \hat{D}(A)$; d'après l'hypothèse, on peut donc prolonger u au-delà de T , ce qui est contradictoire. Donc pour tout $x \in D(\hat{A})$ il existe une bonne solution sur $[0, +\infty[$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$, $u(0) = x$. Etant donné $x \in \overline{D(A)}$, il existe $x_n \in D(\hat{A})$ avec $x_n \rightarrow x$; soit u_n la bonne solution sur $[0, +\infty[$ de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni 0$, $u_n(0) = x_n$; d'après (2), $|u_n(t) - u_m(t)| \leq |x_n - x_m|$ pour $t \geq 0$, donc u_n converge uniformément vers u , qui, le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ étant s.c.s., sera bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$.

Remarque 1.5. L'égalité $|\hat{A}x| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|S(t)x - x|}{t}$ a été démontré par Crandall [18] lorsque $\bigcap_{0 < \lambda < \lambda_0} R(I + \lambda A) \supset D(A)$.

Corollaire 1.3. Soit $A \in \mathcal{A}$. Si $\Sigma(A) \neq \emptyset$, alors $D(\hat{A}) = \hat{D}(A)$.

En effet soit $x_n \in D(\hat{A})$, $x_n \rightarrow x$, $|\hat{A}x_n| \leq M$. On peut toujours supposer $0 \in \Sigma(A)$. On a pour tout $t > 0$, $\frac{|S(t)x_n - x_n|}{t} \leq |\hat{A}x_n| \leq M$ et donc à la limite

$$\frac{|S(t)x-x|}{t} \leq M \text{ . D'où } x \in D(\hat{A}) \text{ .}$$

Caractérisons les $f \in L^1(0,T;X)$ tels que le problème $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = x$ soit bien posé.

Proposition 1.8. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $f \in L^1(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $f(t) \in \Sigma(A)$ p.p.t $\in]0,T[$.
- ii) Pour tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe une bonne solution sur $[0,T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = x$.

Nous utiliserons le lemme suivant dont nous avons donné une démonstration dans [5] (lemme A.0).

Lemme 1.3. Soient S une partie de X et $f \in L^1(0,T;X)$ telle que $f(t) \in \overline{S}$ p.p.t $\in]0,T[$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g à valeurs dans S telle que $\|g-f\|_{L^1(0,T)} \leq \varepsilon$.

Démonstration : Supposons d'abord $f(t) \in \Sigma(A)$ p.p.t $\in]0,T[$ et soit $x \in \overline{D(A)}$. D'après le lemme 1.3., il existe une suite de fonctions en escaliers g_n à valeurs dans $\Sigma(A)$ tels que $g_n \rightarrow f$ dans $L^1(0,T;X)$. Or si g est une fonction en escaliers de partition $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = T$ prenant la valeur $y_k \in \Sigma(A)$ sur $]a_{k-1}, a_k[$, on peut définir par pas v sur $[0,T]$ par $v(0) = x$, $v(t) = S^{A-y_k}(t-a_{k-1})v(a_{k-1})$ sur $[a_{k-1}, a_k]$; v est de toute évidence bonne solution sur $[0,T]$ de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$. Donc il existe u_n bonne solution sur $[0,T]$ de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni g_n$, $u_n(0) = x$. D'après (2), u_n converge uniformément sur $[0,T]$ et sa limite est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

Supposons maintenant ii) vérifié et montrons que pour tout point de Lebesgue à droite t de f , $f(t+0) \in \Sigma(A)$. On peut toujours supposer 0 point de Lebesgue à droite de f et montrons que $y = f(+0) \in \Sigma(A)$. Considérons $f_n(t) = f(\tau)$ pour $t \in]\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}[$ et $\tau = t - \frac{(k-1)T}{n}$. On a $\|f_n - y\|_{L^1} = \int_0^{T/n} |f(\tau) - y| d\tau$ et donc $f_n \rightarrow y$ dans $L^1(0,T;X)$. Opérant un raccordement comme dans le paragraphe précédent et appliquant la

proposition 1.6. on voit que $y \in D(A)$.

Notons enfin la propriété relative aux solutions faibles.
Notons $\Sigma_0(A)$ l'ensemble des $y \in X$ tels que pour tout $u_0 \in \hat{D}(A)$,
il existe $T > 0$ et u solution faible sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni y$
telle que $u(0) = u_0$.

Proposition 1.8b. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; \overline{\Sigma_0(A)})$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) u est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$
- ii) u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

Démonstration : L'implication ii) $\implies$ i) est connue. Pour démontrer
i) $\implies$ ii) , il suffit d'après le lemme 1.3 et les inégalités (2)
de le démontrer pour $u(0) \in D(\hat{A})$ et f fonction en escaliers à
valeurs dans $\Sigma_0(A)$. Alors d'après la proposition 1.5., $u(t) \in D(\hat{A})$
pour tout $t \in [0, T[$ et donc par hypothèse, pour tout $t \in [0, T[$,
il existe $\eta > 0$ tel que u soit solution faible sur $[t, t+\eta]$ de
 $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. Donc u est solution faible sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

Remarque 1.5b. On en déduit en particulier que $\Sigma_0(A)$ est fermé .

3. Théorèmes d'existence.

Introduisons d'abord la notation suivante :

Notation 1.3. Soient $A \in \mathcal{A}$ et C une partie de X . On notera
 $S(A; C)$ la fermeture dans X de $\{y \in X ; \forall x \in C, \exists \lambda_n \downarrow 0, \exists U \text{ voisinage de } x, \bigcap_n R(I + \lambda_n(A-y)) \supset U \cap C\}$.

Remarque 1.6. Notons que l'hypothèse $0 \in S(A; D(A))$ est plus faible que
la condition (I) de Brézis-Pazy [11] :

$$\forall x \in D(A), \exists \lambda_n \downarrow 0, \exists U \text{ voisinage de } x, \bigcap_n R(I + \lambda_n A) \supset U \cap D(A) .$$

Lorsque A est m -accrétif, $S(A; X) = X$.

Remarquons enfin que $S(A; C) = S(\bar{A}; C)$.

Théorème 1.3. Soient $A \in \mathcal{A}$, $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1(0, T; S(A, \hat{D}(A)))$. Il existe
une bonne solution sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = u_0$.

Démonstration : Notons d'abord d'après la proposition 0.5, puisque $S(A, \hat{D}(A)) \neq \emptyset$ par hypothèse que $\hat{D}(A) = D(\hat{A})$. D'autre part d'après la proposition 1.8., il suffit de démontrer que $S(A; \hat{D}(A)) \subset \Sigma(A)$. D'après la proposition 1.7., il suffit donc, après éventuellement translation, de montrer qu'étant donné $x \in \hat{D}(A) = D(\hat{A})$, vérifiant

$$\exists \lambda_n \downarrow 0, \exists U \text{ voisinage de } x, \bigcap_n \overline{R(I + \lambda_n A)} \supset D(A) \cap U,$$

il existe $T > 0$ et u bonne solution sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$, $u(0) = x$. On peut toujours supposer A fermé, et donc $R(I + \lambda_n A)$ fermé. Soit $\rho > 0$ tel que $\bigcap_n R(I + \lambda_n A) \supset B(x, \rho) \cap D(A)$. Montrons qu'il existe n_0 et $T > 0$ tels que l'équation

$$u_n(t) = x \text{ pour } t \leq 0, \quad \frac{u_n(t) - u_n(t - \lambda_n)}{\lambda_n} + Au_n(t) \ni 0 \text{ pour } t \in]0, T]$$

admette une solution unique pour tout $n \geq n_0$.

Cette équation s'écrit $u_n(t) = x$ pour $t \leq 0$,

$$\begin{cases} u_n(t) = J_{\lambda_n}(u_n(t - \lambda_n)) & \text{pour } t \in]0, T] \end{cases};$$

elle admet au plus une solution. Supposons qu'il existe une solution sur $[-\infty, k\lambda_n]$, alors $u_n(t) = J_{\lambda_n}^k x$ pour $t \in](k-1)\lambda_n, k\lambda_n]$ et $|u_n(t) - x| \leq k\lambda_n |\hat{A}x|$. Si $k\lambda_n |\hat{A}x| \leq \rho$, alors $u_n(t) \in D(J_{\lambda_n})$ et on peut définir u_n sur $]k\lambda_n, (k+1)\lambda_n]$.

Donc si $\lambda_n \left[\frac{T}{\lambda_n} \right] \leq \rho / |\hat{A}x|$, on peut définir u_n sur $[-\infty, T]$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n \left[\frac{T}{\lambda_n} \right] = T$, donc si $T < \rho / |\hat{A}x|$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on puisse définir u_n sur $[-\infty, T]$.

Utilisant les résultats de Crandall-Liggett [21], u_n converge uniformément sur $[0, T]$ vers une fonction u , qui d'après le théorème 1.1. est bonne solution sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$.

Enonçons comme corollaire immédiat la forme annoncée dans [4].

Corollaire 1.4. Soient $A \in \mathcal{A}$, $u_0 \in \overline{D(A)}$ et $f \in L^1(0, T; S(A; \hat{D}(A)))$. Il existe une solution intégrale unique de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = u_0$. De plus $u(t) \in \overline{D(A)}$ pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $[v, g] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$ telle que v soit solution intégrale de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ on a les inégalités (1) et (2). Si $f \in VB(0, T; X)$, u est lipschitzienne ssi $u_0 \in D(\hat{A})$ et alors $u(t) \in D(\hat{A})$ pour tout $t \in [0, T]$.

Remarque 1.7. Dans la démonstration du théorème intervient, mis à part le théorème de Crandall-Liggett qui est essentiel, la possibilité de prolonger une solution (Proposition 1.6.). On peut démontrer de la même manière l'existence d'une bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$ pour $f \in L^1(0, T; S(A, D))$ où D est une partie telle que $D \cap D(\hat{A}) = D(A)$ et pour toute suite $x_n \in D \cap D(\hat{A})$, $x_n \rightarrow x$, $|\hat{A}x_n|$ borné, on ait $x \in D$. C'est le cas en particulier de $D(A)$ lorsque A est séquentiellement demi-fermé dans X réflexif.

Lorsque A est maximal, la proposition 1.4. permet d'affirmer que la solution u du théorème 1.3. est solution forte si seulement $\frac{du}{dt} \in L^1_{loc}(0, T; X)$. Il suffit même que le couple $[u, f]$ vérifie les inégalités (6) (Remarque 1.3.). Ces inégalités ont l'inconvénient de ne pas être stables par passage à la limite dans $\mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$. Ce n'est pas le cas des inégalités plus faibles :

$$(8) \quad \langle u(t) - u(s), x - u(s) \rangle_s + \int_s^t \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle_s d\tau \geq 0 \quad \forall [x, y] \in A, \\ \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

On a la caractérisation :

Proposition 1.9. Soient $A \in \mathcal{A}$, C une partie de X , $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; C) \times L^1(0, T; S(A; C))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) u est solution forte de $\frac{du}{dt} + \bar{A}u \ni f$
- ii) $\frac{du}{dt} \in L^1_{loc}(0, T; X)$ et u vérifient les inégalités (8).

De plus alors $\frac{du}{dt}(t) \in (f(t) - \bar{A}u(t))^o$ p.p. $t \in]0, T[$.

Démonstration : L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est connue. Supposons ii) vérifiée. On peut toujours supposer A fermé. Montrons d'abord que l'on peut toujours supposer X séparable. Soient $C_0 = u([0, T])$ et $\{y_k\}$ suite de X telle que $f(t) \in \{y_k; k \geq 1\}$ p.p. $t \in]0, T[$ et

$\forall k \geq 1, \forall x \in C_0, \exists U$ voisinage de $x, \exists \lambda_n \downarrow 0, \bigcap_n R(I + \lambda_n^k (A - y_k)) \supset C_0 \cap U$.

Le sous-espace fermé X_0 engendré par $C_0, \{y_k; k \geq 1\}$ et $\bigcup_{n,k} (I + \lambda_n^k (A - y_k))^{-1} C_0$ est séparable. Considérons l'opérateur

$$A_0 = \{ [(I + \lambda_n^k (A - y_k))^{-1} x, \frac{x - (I + \lambda_n^k (A - y_k))^{-1} x}{\lambda_n^k} + y_k] ; k \geq 1, n \geq 1, \}$$

$x_0 \in C_0 \cap R(I + \lambda_n^k (A - y_k))$. On a $A_0 \subset A \cap X_0 \times X_0$ et $\{y_k; k \geq 1\} \subset S(A_0; C_0)$.

Supposant X séparable, soit $\{[x_n, y_n]\}$ suite dense de A .

L'ensemble Δ des $t_0 \in]0, T[$ qui sont points de Lebesgue de f et $\frac{du}{dt}$ et tels que les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2} |u(t) - x_n|^2$ soient dérivables en t_0 , est de complémentaire négligeable donc $]0, T[$. Fixons $t \in \Delta$.

Utilisant (8) on a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - x_n|^2 &= \langle \frac{du}{dt}(t), u(t) - x_n \rangle_s = - \langle \frac{du}{dt}(t), x_n - u(t) \rangle_s \\ &\leq \langle f(t) - y_n, u(t) - x_n \rangle_s \end{aligned}$$

soit $\langle f(t) - \frac{du}{dt}(t) - y_n, u(t) - x_n \rangle_s \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ étant s.c.s., on a

$$(9) \quad \langle f(t) - \frac{du}{dt}(t) - y, u(t) - x \rangle_s \geq 0 \quad \forall [x, y] \in A.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $z \in X$, U voisinage de $u(t)$ et $\lambda_n \downarrow 0$ tels que $\bigcap_n R(I + \lambda_n (A - z)) \supset C \cap U$ et $|z - f(t)| \leq \varepsilon$. Pour n suffisamment grand, $u(t - \lambda_n) \in C \cap U$ et donc $u(t - \lambda_n) = \xi_n + \lambda_n (\eta_n - z)$ avec $[\xi_n, \eta_n] \in A$.

Enfin $u(t - \lambda_n) = u(t) - \lambda_n (\frac{du}{dt}(t) + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

$$\text{Donc } f(t) - \frac{du}{dt}(t) - \eta_n = (f(t) - z) + \varepsilon_n - \frac{u(t) - \xi_n}{\lambda_n}.$$

Reportant dans (9), on a donc pour tout $n \geq 1$

$$\langle f(t) - z + \varepsilon_n - \frac{u(t) - \xi_n}{\lambda_n}, u(t) - \xi_n \rangle_s \geq 0$$

soit $|u(t) - \xi_n| \leq \lambda_n (\varepsilon + |\varepsilon_n|)$ et $|f(t) - \frac{du}{dt}(t) - \eta_n| \leq 2(\varepsilon + |\varepsilon_n|)$.

Donc $[u(t), f(t) - \frac{du}{dt}(t)] \in A$.

Puisque u est solution forte, pour tout $y \in Au(t)$, on a pour tout $h > 0$,

$$\left| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau) - y| d\tau$$

donc $\left| \frac{du}{dt}(t) \right| \leq |f(t) - Au(t)|$.

On peut aussi en reprenant la même méthode démontrer le résultat plus précis :

Proposition 1.10. Soient $A \in \mathcal{A}$, $f \in L^1(0, T; S(A, D(\hat{A})))$, u bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ et $t \in]0, T[$ point de Lebesgue à droite de f .

Si u est fortement dérivable à gauche en t et $\frac{d^-u}{dt}(t) \in D^+u(t)$, alors $\frac{d^-u}{dt}(t) \in (f(t+0) - \bar{A}u(t))^0$.

Démonstration : D'après le théorème 1.2., $u(t) \in D(\hat{A})$ et $D^+u(t) \subset (f(t+0) - \hat{A}u(t))^0$. On a donc $\langle f(t+0) - \frac{d^-u}{dt}(t) - y, u(t) - x \rangle_s \geq 0$ $\forall [x, y] \in A$. Prenant comme à la proposition 1.9. $z \in X$, $[\xi_n, \eta_n] \in A$

tels que $|f(t+0) - z| \leq \varepsilon$ et $u(t - \lambda_n) = \xi_n + \lambda_n(\eta_n - z)$, on obtiendra $\xi_n \rightarrow u(t)$ et $\lim |f(t+0) - \frac{d^-u}{dt}(t) - \eta_n| \leq 2\varepsilon$. Donc

$\frac{d^-u}{dt}(t) \in f(t+0) - \bar{A}u(t)$. Mais $\left| \frac{d^-u}{dt}(t) \right| = |f(t+0) - \hat{A}u(t)| \leq |f(t+0) - \bar{A}u(t)|$

d'où $\frac{d^-u}{dt}(t) \in (f(t+0) - \bar{A}u(t))^0$.

Remarque 1.8. Lorsque la norme est dérivable, étant donné

$[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; C) \times L^1(0, T; S(A; C))$ vérifiant les inégalités (6) et $t \in]0, T[$ un point de Lebesgue à gauche de f ; si u est fortement dérivable à gauche en t , on a $\frac{d^-u}{dt}(t) \in f(t-0) - \bar{A}u(t)$; on peut en effet démontrer les inégalités $\langle f(t-0) - \frac{d^-u}{dt}(t) - y, F(u(t) - x) \rangle \geq 0$, $\forall [x, y] \in A$.

Proposition 1.11. Supposons X de type R . Soient $A \in \mathcal{A}$ fermé, $f \in VB(0, T; S(A; \hat{D}(A)))$ et $u_0 \in D(\hat{A})$. Il existe une solution forte unique u sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = u_0$. De plus $u(t) \in D(\hat{A})$ pour tout $t \in [0, T]$, $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; X)$ et en tout point t

où u est dérivable, $\frac{du}{dt}(t) \in (f(t+0) - Au(t))^\circ$.

Ces résultats sont un corollaire du théorème 1.3. et de la proposition 1.10.

Corollaire 1.5. Supposons X de type R . Soient $A \in \mathcal{Q}$ fermé et $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; S(A; \hat{D}(A)))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$
- ii) u est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$
- iii) u est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ et $u(0) \in \overline{D(A)}$.

Démonstration : Les implications $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$ sont connues. Supposons $iii)$ vérifié et soient $x_n \in D(\hat{A})$, $x_n \rightarrow u(0)$ et $f_n \in VB(0, T; S(A; \hat{D}(A)))$, $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(0, T; X)$ (l'existence d'une telle suite f_n résulte du lemme 1.3.). Il existe, d'après la proposition 1.11., u_n solution forte de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n(0) = x_n$. D'après la proposition 1.1., u_n est bonne solution et donc on a $\|u_n - u\|_{L^\infty} \leq \|x_n - u(0)\| + \|f_n - f\|_{L^1}$, ce qui montre bien que u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

Remarque 1.9. Ce corollaire généralise partiellement le résultat que nous avons obtenu dans le cas d'un opérateur maximal monotone d'un espace de Hilbert (cf. [10], proposition 3.9.). On avait en effet démontré : Supposons X espace de Hilbert et A maximal monotone ; étant donné $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$, u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ ssi u est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

Nous pouvons démontrer cette équivalence complète entre solution intégrale et solution faible également dans un espace de dimension finie, plus précisément :

Supposons $\dim X < +\infty$ et soient $A \in \mathcal{Q}$ fermé, C partie contenant $D(A)$, $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; C) \times L^1(0, T; S(A; C))$; alors u est solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ ssi u est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

Le problème dans un espace de Banach de type R quelconque, ou simplement d'un espace uniformément convexe reste ouvert.

Remarque 1.10. Il est peu vraisemblable que le corollaire 1.4. soit vrai dans un espace quelconque. Cependant la recherche d'un contre-exemple est malaisée : en effet étant donné un opérateur m -accrétif A , l'ensemble des $x \in \overline{D(A)}$ tel que $S(t)x$ soit solution forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ peut ne pas être dense dans $\overline{D(A)}$, sans pour cela qu'il existe une solution intégrale qui ne soit pas solution faible.

4. Perturbations lipschitziennes. Opérateurs m -accrétifs.

Enonçons d'abord le résultat dans le cas des bonnes solutions :

Proposition 1.12. Soient $A \in \mathcal{A}$ et B une application de $]0, T[\times \overline{D(A)}$ dans $\Sigma(A)$ vérifiant : $\forall x \in \overline{D(A)}$, la fonction $t \mapsto B(t, x)$ est intégrable

Il existe $\omega \in L^1(0, T)$ telle que

$$|B(t, x) - B(t, y)| \leq \omega(t) |x - y| \quad \text{p.p. } t \in]0, T[, \quad \forall x, y \in \overline{D(A)}.$$

Alors pour tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe $u \in \mathcal{C}([0, T]; \overline{D(A)})$ unique telle que $u(0) = x$ et u soit bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $f(t) = B(t, u(t))$. Supposons de plus que pour tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe U voisinage de x et γ fonction croissante de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$|B(t, y) - B(s, y)| \leq \gamma(t) - \gamma(s), \quad \forall y \in \overline{D(A)} \cap U, \quad \text{p.p. } t, s, \quad t \geq s,$$

alors u est lipschitzienne ssi $x \in D(\hat{A})$.

Démonstration : Fixons $x \in \overline{D(A)}$ et considérons l'application $S : u \in \mathcal{C}([0, T]; \overline{D(A)}) \mapsto Su$, la bonne solution de $\frac{dv}{dt} + Av \ni f$, $v(0) = x$ avec $f(t) = B(t, u(t))$ (D'après les hypothèses, $f \in L^1(0, T; \Sigma(A))$). Le premier point de la proposition est équivalent à S admet un point fixe unique. Or étant donnés $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0, T]; \overline{D(A)})$

$$|Su_1(t) - Su_2(t)| \leq \int_0^t |B(\tau, u_1(\tau)) - B(\tau, u_2(\tau))| d\tau \leq \int_0^t \omega(\tau) |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau$$

donc $|S^n u_1(t) - S^n u_2(t)| \leq \omega_n(t) \|u_1 - u_2\|_{L^\infty}$ où ω_n est défini par

$$\omega_0(t) = 1, \quad \omega_{n+1}(t) = \int_0^t \omega_n(\tau) \omega(\tau) d\tau. \quad \text{Or} \quad \omega_n(t) = \frac{1}{n!} \left(\int_0^t \omega(\tau) d\tau \right)^n \leq \frac{\|\omega\|_{L^1}^n}{n!}.$$

donc il existe n tel que S^n soit une contraction stricte de $\mathcal{C}([0, T]; \overline{D(A)})$ dans lui-même. Faisons les hypothèses supplémentaires de la proposition 1.12. Supposons d'abord u lipschitzienne, alors $B(t, u(t))$ est à variation bornée et donc $x \in D(\hat{A})$. Réciproquement supposons $x \in D(\hat{A})$ et posons $u_n = S^n x$. Puisque $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0, T], \overline{D(A)})$, il existe γ croissante sur $[0, T]$ telle que $|B(t, u_n(\tau)) - B(s, u_n(\tau))| \leq \gamma(t) - \gamma(s)$, $\forall n \geq 0$, $\forall \tau \in [0, T]$, p.p.t, $s, t \geq s$. Par récurrence, d'après la proposition 1.6., u_n est lipschitzienne et $B(t, u_n(t))$ à variation bornée. On a

$$|B(t+h, u_n(t+h)) - B(t, u_n(t))| \leq \omega(t+h) |u_n(t+h) - u_n(t)| + \gamma(t+h) - \gamma(t)$$

$$\text{donc } |u_{n+1}(t+h) - u_{n+1}(t)| \leq |u_{n+1}(h) - x| + \int_0^t \{ \omega(\tau+h) |u_n(\tau+h) - u_n(\tau)| + \gamma(\tau+h) - \gamma(\tau) \} d\tau$$

soit en posant

$$\rho_n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|u_n(t+h) - u_n(t)|}{h}, \text{ puisque}$$

$$\rho_n(0) = |\hat{A}x - B(+0, x)| = \rho_0, \rho_{n+1}(t) \leq \rho_0 + \gamma(T) + \int_0^t \omega(\tau) \rho_n(\tau) d\tau$$

d'où avec les notations précédentes,

$$\rho_n(t) \leq \rho_0 \{ 1 + \omega_1(t) + \dots + \omega_{n-1}(t) \} + \omega_n(t) \|\rho_1\|_{L^\infty}$$

$$\text{soit } \|\rho_n\|_{L^\infty} \leq \rho_0 e^{\|\omega\|_{L^1}} + \frac{\|\omega\|_{L^1}^n}{n!} \|\rho_1\|_{L^\infty} \text{ ce qui montre que } u \text{ est}$$

$$\text{lipschitzien de rapport } \leq \rho_0 e^{\|\omega\|_{L^1}}.$$

Corollaire 1.6. Soient $A \in \mathcal{A}$, $u_0 \in \overline{D(A)}$, B une application de $]0, T[\times \overline{D(A)}$ dans $S(A; \hat{D}(A))$ vérifiant les deux conditions de la proposition 1.12. Il existe $u \in \mathcal{C}([0, T]; \overline{D(A)})$ unique telle que $u(0) = u_0$ et u soit solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $f(t) = B(t, u(t))$.

Corollaire 1.7. Soient $A \in \mathcal{A}$, $u_0 \in \overline{D(A)}$ et B une application de $]0, T[\times \overline{D(A)}$ dans $\Sigma_0(A)$ vérifiant les deux conditions de la proposition 1.12. Il existe $u \in \mathcal{C}([0, T]; \overline{D(A)})$ unique telle que $u(0) = u_0$ et u soit solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $f(t) = B(t, u(t))$.

Utilisons cette proposition pour donner des caractérisations

faibles des opérateurs m -accrétifs.

Proposition 1.13. Soit $A \in \mathcal{A}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\exists \lambda > 0, R(I + \lambda A) = X$
- ii) $\forall \lambda > 0, R(I + \lambda A) = X$
- iii) $\forall x \in \hat{D}(A), \exists U$ voisinage de $x, \exists \lambda_n \downarrow 0, \bigcap_n R(I + \lambda_n A) \supset U$
- iv) A est fermé et $S(A; \hat{D}(A)) = X$
- v) A est maximal et $\Sigma(A) = X$.

Démonstration : L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est classique. On a ii) $\Rightarrow$ iii) trivialement.

Démontrons iii) $\Rightarrow$ iv). Soient $y \in X, x \in \hat{D}(A)$. D'après iii), il existe $\rho > 0, \lambda_n \downarrow 0$ tels que $\bigcap_n R(I + \lambda_n A) \supset B(x, \rho)$. Il existe n_0 tel que $|\lambda_n y| \leq \rho/2$ pour $n \geq n_0$. Soit $\xi \in B(x, \rho/2)$; pour $n \geq n_0$, $\xi + \lambda_n y \in R(I + \lambda_n A)$, donc $\xi \in R(I + \lambda_n (A - y))$; c'est-à-dire que $\bigcap_{n \geq n_0} R(I + \lambda_n (A - y)) \supset B(x, \rho/2)$ et donc a fortiori $y \in S(A; \hat{D}(A))$.

D'autre part A est fermé; il est en effet maximal d'après le lemme :

Lemme 1.4. Soit $A \in \mathcal{A}$ vérifiant :

$$\forall y \in X, \forall x \in D(\hat{A}), \exists \lambda > 0, x \in R(I + \lambda(A - y)),$$

alors A est maximal.

Démonstration : Soit $[x, y] \in \overline{D(A)} \times X$ tel que $A \cup \{[x, y]\}$ soit accrétif. Alors $x \in D(\hat{A})$ et pour tout $[\xi, \eta] \in A, \langle \eta - y, \xi - x \rangle_s \geq 0$. Soit $\lambda > 0$ tel que $x \in R(I + \lambda(A - y))$; il existe $[\xi, \eta] \in A$ tel que $x = \xi + \lambda\eta - \lambda y$, d'où $\eta - y = \frac{x - \xi}{\lambda}$ et en particulier, $\frac{|\xi - x|^2}{\lambda} \leq 0$, d'où $\xi = x$ et $\eta = y$.

Fin de la démonstration de la Proposition 1.13 : Démontrons iv) $\Rightarrow$ v). La propriété $\Sigma(A) = X$ résulte du théorème 1.3. Montrons que A est maximal. Soit $[x, y] \in \overline{D(A)} \times X$ tel que $A \cup [x, y]$ soit accrétif. Alors $x \in D(\hat{A})$; étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $z \in X, \lambda_n \downarrow 0, U$ voisinage de x tels que $|y - z| \leq \varepsilon, \bigcap_n R(I + \lambda_n (A - z)) \supset U \cap D(\hat{A})$. Soient $[\xi_n, \eta_n] \in A$ tels que $x = \xi_n + \lambda_n(\eta_n - z)$. On a

$y - \eta_n = y - z + \frac{x - \xi_n}{\lambda_n}$ d'où $|x - \xi_n|^2 \leq \lambda_n \varepsilon |x - \xi_n|$ et $|y - \eta_n| \leq 2\varepsilon$, ce qui montre que $[x, y] \in \bar{A} = A$.

Enfin v) $\Rightarrow$ i). En effet d'après la proposition 1.12 pour tout $y \in X$ et tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; \overline{D(A)})$ telle que $u(0) = u_0$ et u bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $f(t) = y - u(t)$. On achève alors en utilisant le lemme :

Lemme 1.5. Soient $A \in \mathcal{A}$ maximal, $y \in X$. S'il existe $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; \overline{D(A)})$ tel que u soit bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $f(t) = y - u(t)$, alors $y \in R(A+I)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = (A+I)^{-1}y$.

Démonstration : Etant donné $[\xi, \eta] \in A$, on a

$$(10) \quad \frac{1}{2}|u(t) - \xi|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s) - \xi|^2 + \int_s^t \langle y - \xi - \eta, u(\tau) - \xi \rangle_s d\tau - \int_s^t |u(\tau) - \xi|^2 d\tau, \quad \forall s \leq t,$$

d'où en utilisant le lemme de Gronwall :

$$|u(t) - \xi| \leq |y - \xi - \eta| + e^{-t}|u_0 - \xi|, \quad \forall t \geq 0$$

ce qui montre que u est borné.

D'autre part on a puisque pour $h > 0$, $t \mapsto u(t+h)$ est solution intégrale de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ avec $g(t) = y - u(t+h)$,

$$\frac{1}{2}|u(t+h) - u(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s+h) - u(s)|^2 + \int_s^t -|u(\tau+h) - u(\tau)|^2 d\tau, \quad \forall s \leq t$$

$$\text{et donc } |u(t+h) - u(t)| \leq e^{-t}|u(h) - u_0| \leq 2e^{-t}\|u\|_{L^\infty(0, +\infty)}.$$

Ce qui montre que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = x$ existe.

On a d'autre part en utilisant (10), pour $[\xi, \eta] \in A$ et $h > 0$ fixés

$$\frac{1}{2}|u(t+h) - \xi|^2 \leq \frac{1}{2}e^{-2h}|u(t) - \xi|^2 + \int_0^h \langle y - \xi - \eta, u(t+\tau) - \xi \rangle_s e^{-2(h-\tau)} d\tau, \quad \forall t \geq 0$$

d'où, en faisant $t \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-2h})|x - \xi|^2 \leq \langle y - \xi - \eta, x - \xi \rangle_s \int_0^h e^{-2(h-\tau)} d\tau$$

soit $\langle y - x - \eta, x - \xi \rangle_s \geq 0$; et puisque A est maximal, $y - x \in Ax$, ce qui achève de démontrer le lemme.

Remarque 1.11. L'équivalence ii) $\iff$ iii) généralise un résultat de Kato [24]. Utilisant la remarque 1.7., on peut généraliser le deuxième résultat de Kato [24] ; on a en effet : supposant X réflexif et $A \in \mathcal{Q}$ séquentiellement demi-fermé, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est m -accrétif

ii) $\forall x \in D(A)$, $\exists U$ voisinage de x , $\exists \lambda_n \downarrow 0$, $\bigcap_n R(I + \lambda_n A) \supset U$

iii) $S(A; D(A)) = X$.

Lorsque l'application $[x, y] \mapsto \langle y, x \rangle_s$ est s.c.s. (resp. séquentiellement s.c.s.) de $X \times_\sigma (X, X')$ sur $\mathbb{R}$ tout opérateur m -accrétif est demi-fermé (resp. séquentiellement demi-fermé) ; alors A est m -accrétif ssi A est demi-fermé (resp. séquentiellement demi-fermé) et $S(A, D(A)) = X$.

Exprimons ces résultats en terme d'opérateur. Introduisons la notation suivante :

Notation 1.4. Soient $A \in \mathcal{Q}$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On pose

$$\mathcal{F}(J; A) = \{ [u, f] \in \mathcal{C}(J; X) \times L^1_{loc}(J; X) ; u \text{ bonne solution de } \frac{du}{dt} + Au \ni f \}$$

$$\mathcal{F}_0(J; A) = \{ [u, f] \in \mathcal{C}(J; X) \times L^1_{loc}(J; X) ; u \text{ solution faible de } \frac{du}{dt} + Au \ni f \}$$

On a (Proposition 1.1.), $\mathcal{F}_0(J; A) \subset \mathcal{F}(J; A)$ et $\mathcal{F}_0(J; A)$, $\mathcal{F}(J; A)$ fermés dans $\mathcal{C}(J; X) \times L^1_{loc}(J; X)$. Remarquons la

Proposition 1.14. Soient $A \in \mathcal{Q}$ et J intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors

$\mathcal{F}(J; A)$ est fermé dans $L^1_{loc}(J; X) \times L^1_{loc}(J; X)$.

Démonstration : Soient $[u_n, f_n] \in \mathcal{F}(J; A)$ tels que $[u_n, f_n] \rightarrow [u, f]$ dans $L^1_{loc}(J; X) \times L^1_{loc}(J; X)$. On peut toujours supposer $u_n(t) \rightarrow u(t)$ p.p. $t \in J$. Etant donné $[a, b] \subset J$, il existe $t_0 \in J \cap]-\infty, a]$ tel que $u_n(t_0) \rightarrow u(t_0)$ et puisque $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(t_0, b; X)$, u_n converge uniformément sur $[t_0, b]$. Donc u_n converge dans $\mathcal{C}(J; X)$ et sa limite $\bar{u} = u$ p.p. $t \in J$.

Proposition 1.15. Soient $A \in \mathcal{Q}$, $u_0 \in \overline{D(A)}$, $1 \leq p \leq +\infty$. L'opérateur

$$\mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A) = \{ [u, f] \in L^p(0, T; X) \times L^p(0, T; X) ; [u, f] \in \mathcal{F}([0, T]; A), u(0) = u_0 \}$$

est un opérateur accrétif fermé de $L^p(0, T; X)$.

Si A est m -accrétif, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
 $R(\mathcal{F}^{p, u_0}(0, T; A) + \lambda I) = L^p(0, T; X)$ (en particulier $\mathcal{F}^{p, u_0}(0, T; A)$ est
 m -accrétif et surjectif) et pour tout $\lambda > 0$,
 $\mathcal{F}^{p, u_0}(0, T; A) + \lambda I = \mathcal{F}^{p, u_0}(0, T; A + \lambda I)$.

Démonstration : Etant donné $[u, f]$ et $[v, g] \in \mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A)$, on a
pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\frac{1}{2} |u(t) - v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u(s) - v(s)|^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_\sigma |u(\tau) - v(\tau)| d\tau$$

$$\text{en posant } \langle y, x \rangle_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \frac{\langle y, x \rangle_s}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Puisque $\tau \mapsto \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_\sigma$ est intégrable, on a d'après
la proposition 0.13.,

$$\frac{1}{p} |u(t) - v(t)|^p \leq \frac{1}{p} |u(s) - v(s)|^p + \int_s^t \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_\sigma |u(\tau) - v(\tau)|^{p-1} d\tau$$

d'où l'on tire en particulier :

$$\int_0^T \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_\sigma |u(\tau) - v(\tau)|^{p-1} d\tau \geq \frac{1}{p} |u(T) - v(T)|^p \geq 0,$$

ce qui montre, d'après la proposition 0.2. que $\mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A)$ est
accrétif dans $L^p(0, T; X)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Pour démontrer l'accrétivité dans $L^\infty(0, T; X)$, il suffit de
remarquer que si $[u, f] \in L^\infty(0, T; X) \times L^\infty(0, T; X)$, $\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \langle f, u \rangle_{s, L^p} \leq \langle f, u \rangle_{s, L^\infty}$

Lorsque A est m -accrétif, d'après le théorème 1.3. et la
proposition 1.12.,

$R(\mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A) + \lambda I) = L^p(0, T; X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérant $\lambda > 0$,
on a $\mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A) + \lambda I \subset \mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A + \lambda I)$, car si $[u, f] \in \mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A)$

pour tout $[x, y] \in A$, $\frac{1}{2} |u(t) - x|^2 \leq \frac{1}{2} |u(s) - x|^2$
 $+ \int_s^t \langle (f(\tau) + \lambda u(\tau)) - (y + \lambda x), u(\tau) - x \rangle_s d\tau$
 $- \lambda \int_s^t |u(\tau) - x|^2 d\tau$ et donc u est

solution intégrale de $\frac{du}{dt} + (A + \lambda I)u = f_1$ avec $f_1 = f + \lambda u$; $A + \lambda I$ étant m -accrétif, d'après le théorème 1.3., $[u, f_1] \in \mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A + \lambda I)$.
Or $\mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A) + \lambda I$ est m -accrétif donc égal à $\mathcal{F}^{u_0, p}(0, T; A + \lambda I)$.

Notons enfin la caractérisation des opérateurs solutions :

Proposition 1.16. Soit $\mathcal{F}$ un opérateur de $\mathcal{C}([0, +\infty[; X) \times L^1_{loc}([0, +\infty[; X)$.

Il existe A m -accrétif tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, +\infty[; A)$ si $\mathcal{F}$ vérifie les conditions :

- a) $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{C}([0, +\infty[; X) \times L^1_{loc}([0, +\infty[; X)$
- b) $\mathcal{F}$ est invariant par translation sur $\mathcal{C}[0, +\infty[$, i.e. si $[u, f] \in \mathcal{F}$, pour tout $h \geq 0$, $[u(.+h), f(.+h)] \in \mathcal{F}$.
- c) $\mathcal{F}$ vérifie les inégalités (1), i.e. pour tout $[u, f] \in \mathcal{F}$, $[v, g] \in \mathcal{F}$,

$$\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s)-v(s)|^2 + \int_s^t \langle f(\tau)-g(\tau), u(\tau)-v(\tau) \rangle_s d\tau,$$

$$\forall 0 \leq s \leq t < +\infty.$$

- d) Posant $C = \{u(0) ; u \in D(\mathcal{F})\}$, on a

$$\forall f \in L^1_{loc}([0, +\infty[; X), \forall x \in C, \exists u \in \mathcal{F}^{-1}f, u(0) = x.$$

Alors A est unique et $\overline{D(A)} = C$.

Démonstration : Si A est m -accrétif et $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, +\infty[; A)$, $\mathcal{F}$ vérifie a), b), c), d) ; de plus $\overline{D(A)} = C$ et $A = \mathcal{F} \cap X \times X$ où l'on identifie $x \in X$ à la fonction constante égale à x .

Réciproquement supposons $\mathcal{F}$ vérifié a), b), c), d) et posons $A = \mathcal{F} \cap X \times X$. D'après c), A est accrétif.

Etant donné $y \in X$, il existe $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; X)$ tel que $[u, y-u] \in \mathcal{F}$. En effet, fixant $x \in C$ et considérant la suite u_n définie par $u_0 = x$, $u_{n+1} \in \mathcal{F}^{-1}(y-u_n)$, $u_{n+1}(0) = x$, on a

$$|u_{n+1}-u_n(t)| \leq |u_{n+1}(s)-u_n(s)| + \int_s^t |u_n(\tau)-u_{n-1}(\tau)| d\tau, \text{ d'où}$$

$|u_{n+1}(t)-u_n(t)| \leq \frac{t^n}{n!} \|u_1-u_0\|_{L^\infty(0,t)}$; donc u_n converge uniformément sur tout compact ; l'opérateur $\mathcal{F}$ étant fermé, sa limite u vérifie $[u, y-u] \in \mathcal{F}$.

D'après b) et c) on a, $u(t) \rightarrow x_0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$; mais $\mathcal{F}$ étant fermé, $[x_0, y-x_0] \in \mathcal{F}$ et donc $[x_0, y-x_0] \in A$, ce qui montre que A est m-accrétif.

D'après c) et le théorème 1.3., $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}([0, +\infty[; A)$ car si $[u, f] \in \mathcal{F}$, u est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. Mais $D(A) \subset C$ et d'après a), c), d), C est fermé, donc $\overline{D(A)} = C$. Enfin pour tout $x \in C$, $\mathcal{F}^x = \{[u, f] \in \mathcal{F}; u(0) = x\}$ est surjectif, donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, +\infty[; A)$.

Corollaire 1.8. Soient C un fermé de X et $\{S_y(t); y \in X, t \in [0, +\infty[\}$ une famille d'applications de C dans C vérifiant :

$$a) S_y(0)x = x, \forall x \in C, \forall y \in X.$$

$$b) S_y(t+s) = S_y(t) S_y(s), \forall t, s \geq 0, \forall y \in X.$$

$$c) \frac{1}{2} |S_y(t)x - S_{y'}(t)x'|^2 \leq \frac{1}{2} |x - x'|^2 + \int_0^t \langle y - y', S_y(\tau)x - S_{y'}(\tau)x' \rangle_s d\tau, \\ \forall x, x' \in C, \forall y, y' \in X, \forall t \geq 0.$$

Alors il existe un opérateur m-accrétif unique A tel que $S_y(t) = S^{A-y}(t)$ pour tout $y \in X$.

En effet utilisant le lemme 1.3., il existe $\mathcal{F}$ vérifiant les conditions de la proposition 1.16., unique tel que pour tout $x \in C$ et $y \in X$, $[S_y(t)x, y] \in \mathcal{F}$.

Remarque 1.12. Si $S(t)$ est un semi-groupe continu de contractions linéaires sur X , on peut définir $S_y(t)x = S(t) + \int_0^t S(t-s)y ds$ qui vérifie les conditions du corollaire 1.7.. On peut, en quelque sorte, considérer ce corollaire comme une généralisation du théorème de Hille-Yosida.

5. Solutions périodiques.

Proposition 1.17. Soient $A \in \mathcal{Q}$ et $f \in L^1(0, T; S(A, \hat{D}(A)))$. On suppose qu'il existe $\omega > 0$ tel que $A - \omega I \in \mathcal{Q}$. Alors il existe une bonne solution unique u de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = u(T)$.

Si de plus f est à variation bornée, $u(t) \in D(\hat{A})$ pour tout $t \in [0, T]$, u est lipchitzienne et $\|u\|_{\text{Lip}} \leq \frac{1}{1 - e^{-\omega T}} \{v_f(T) + |f(+0) - f(T-0)|\}$

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons le lemme :

Lemme 1.6. Soient $A \in \mathcal{A}$, $\omega > 0$ tels que $A_1 = A - \omega I \in \mathcal{A}$ et $f \in L^1(0, T; S(A, \hat{D}(A)))$. Si u est bonne solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, alors u est bonne solution de $\frac{du}{dt} + A_1 u \ni f_1$ avec $f_1 = f - \omega u$.

Démonstration de la Proposition 1.17 : D'après le théorème 1.3. pour tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe une bonne solution u_x de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u_x(0) = x$; posons $Sx = u_x(T)$. La première partie de la proposition revient à démontrer que S admet un point fixe unique. Or d'après le lemme 1.6., on a

$$\frac{1}{2} |u_{x_1}(t) - u_{x_2}(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u_{x_1}(s) - u_{x_2}(s)|^2 + \int_s^t -\omega |u_{x_1}(\tau) - u_{x_2}(\tau)|^2 d\tau,$$

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

d'où

$|u_{x_1}(t) - u_{x_2}(t)| \leq e^{-\omega(t-s)} |u_{x_1}(s) - u_{x_2}(s)|$, $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$, ce qui montre que S est lipchitzienne de rapport $e^{-\omega T} < 1$.

Lorsque f est à variation bornée, soit u la solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = u(T)$. Prolongeant f par période de longueur T , le prolongement de u par période de longueur T est bonne solution sur $\mathbb{R}$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ et donc d'après le lemme 1.6.

$$|u(t+h) - u(t)| \leq e^{-\omega(t-s)} |u(s+h) - u(s)| + \int_s^t e^{-\omega(t-\tau)} |f(\tau+h) - f(\tau)| d\tau$$

soit

$$|u(t+h) - u(t)| \leq \frac{1}{1 - e^{-\omega T}} \int_{t-T}^t e^{-\omega(t-\tau)} |f(\tau+h) - f(\tau)| d\tau$$

$$\leq \frac{h}{1 - e^{-\omega T}} \{v_f(T) + f(+0) - f(T-0)\}.$$

Démonstration du lemme 1.6. Lorsque A est m -accrétif, le lemme résulte de la proposition 1.15. Dans le cas général l'argument de maximalité ne peut être utilisé et l'on doit, en fait, reprendre la démonstration du théorème 1.3. On se ramène au cas où $f=0$, $u(0) \in D(\hat{A})$ et $R(I + \lambda_n A) \supset D(A) \cap B(u(0), \rho)$ avec $\rho > T|\hat{A}x|$. Alors

$u = \lim u_n$ où u_n est solution de $\frac{u_n(t) - u_n(t - \lambda_n)}{\lambda_n} + Au_n(t) \ni 0$;

d'où $\frac{u_n(t) - u_n(t - \lambda_n)}{\lambda_n} + A_1 u_n(t) \ni -\omega u_n(t)$. Grâce au théorème 1.1.,

on peut alors affirmer que u est bonne solution de $\frac{du}{dt} + A_1 u \ni -\omega u$.

Proposition 1.18. Soient $A \in \mathcal{A}$, $1 \leq p < +\infty$. L'opérateur

$\mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A) = \{[u,f] \in L^p(0,T;X) \times L^p(0,T;X) ; [u,f] \in \mathcal{F}([0,T];A), u(0)=u(T)\}$
est accréatif fermé dans $L^p(0,T;X)$.

Si A est m -accréatif, alors $\mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A)$ est m -accréatif.

Démonstration : Suivant la démonstration de la proposition 1.15., on a pour $1 \leq p < +\infty$, $[u,f]$ et $[v,g] \in \mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A)$,

$$\int_0^T \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_{\sigma} |u(\tau) - v(\tau)|^{p-1} d\tau \geq \frac{1}{p} |u(T) - v(T)|^p - \frac{1}{p} |u(0) - v(0)|^p = 0.$$

Donc $\mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A)$ est accréatif. Le cas $p = +\infty$ se traite comme à la proposition 1.15.

Lorsque A est m -accréatif, il résulte de la proposition 1.17. que pour $\lambda > 0$, $\mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A + \lambda I) = L^p(0,T;X)$. Or d'après le lemme 1.6. ou la proposition 1.15., $\mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A + \lambda I) = \mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A) + \lambda I$.

Dans le cas d'un espace de type R on a

Proposition 1.19. Supposons X de type R et soient A opérateur m -accréatif de X et $1 \leq p < +\infty$. Soit $[u,f] \in \mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A)$. Il existe $[u_n, f_n] \in W^{1,p}(0,T;X) \times L^p(0,T;X)$ tel que $\frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) \ni f_n(t)$ p.p. $t \in]0,T[$, $u_n(0) = u_n(T)$ et $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(0,T;X)$, $u_n \rightarrow u$ uniformément sur $[0,T]$.

Démonstration : Soit $\mathfrak{F} = \{[u,f] \in W^{1,p}(0,T;X) \times L^p(0,T;X) \text{ tel que } \frac{du}{dt} + Au(t) \ni f(t) \text{ p.p. } t \in]0,T[, u(0) = u(T)\}$. $\mathfrak{F}$ est accréatif contenu dans $\mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A)$. Etant donné $f \in L^p(0,T;X)$, il existe une bonne solution de $\frac{du}{dt} + (A+I)u \ni f$; si f est à variation bornée, u est lipschitienne et donc dans $W^{1,\infty}(0,T;X)$ et $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + u(t) \ni f(t)$ p.p. t . Donc $R(\mathfrak{F} + I) \supset L^p(0,T;X) \cap VB(0,T;X)$ et $\mathfrak{F}$ est m -accréatif. D'où $\mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;A) = \mathfrak{F}$. Remarquant que sur $\mathcal{F}^{\overline{w},p}(0,T;X)$ la topologie $L^p \times L^p$ coïncide avec $L^\infty \times L^p$, on a démontré la proposition.

Remarquons enfin :

Proposition 1.20. Supposons X à norme dérivable. Soient $A \in \mathcal{A}$ m -accrétif et $f \in L^1(0, T; X)$. Alors $\{u \in \mathcal{C}([0, T]; X); [u, f] \in \mathcal{F}([0, T]; A), u(0) = u(T)\}$ est un convexe fermé.

Démonstration : L'opérateur $\mathcal{F}^w(0, T; A) = \{[u, f] \in \mathcal{C}([0, T], X) \times L^1(0, T; X); [u, f] \in \mathcal{F}([0, T], A), u(0) = u(T)\}$ vérifie :

$$\forall [u, f], [v, g] \in \mathcal{F}^w(0, T; A), \int_0^T \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_s d\tau \geq 0.$$

Etant donné $\bar{u} \in \overline{\text{conv}\{u \in \mathcal{C}([0, T]; X); [u, f] \in \mathcal{F}^w(0, T; A)\}}$, on aura, puisque la norme de X est dérivable,

$$\forall [v, g] \in \mathcal{F}^w(0, T; A), \int_0^T \langle f(\tau) - g(\tau), \bar{u}(\tau) - v(\tau) \rangle_s d\tau \geq 0.$$

Or il existe $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ tel que $[u, (f + \bar{u}) - u] \in \mathcal{F}^w(0, T; A)$,

d'où $\int_0^T -|u(\tau) - \bar{u}(\tau)|^2 d\tau \geq 0$, ce qui implique $u = \bar{u}$ et donc $[\bar{u}, f] \in \mathcal{F}^w(0, T; A)$.

Démontrons un théorème d'existence dans le cas où X est uniformément convexe :

Proposition 1.21. Supposons X uniformément convexe. Soient $A \in \mathcal{A}$ fermé et $f \in L^1(0, T; S(A; \overline{\text{conv}} D(A)))$; supposons A coercif au sens suivant :

$$\text{Il existe } [x_0, y_0] \in X \times X, \lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ [x, y] \in A}} \frac{\langle y - y_0, x - x_0 \rangle_s}{|x|} = +\infty.$$

Alors il existe une solution faible u de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = u(T)$.

Nous utiliserons pour la démonstration deux lemmes :

Lemme 1.7. Soient $A \in \mathcal{A}$ coercif au sens de la proposition 1.21.,

$[u_n, f_n] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$ tels que u_n soit solution faible de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, et f_n borné dans $L^1(0, T; X)$, $|u_n(0) - u_n(T)|$ majoré dans $\mathbb{R}$. Alors u_n est borné uniformément sur $[0, T]$.

Lemme 1.8. Supposons X uniformément convexe. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que pour tout $x \in \overline{D(A)}$ il existe $\lambda_n \downarrow 0$, $\rho > 0$, $\bigcap_n \overline{R(I + \lambda_n A)} \supset \overline{\text{conv}} D(A) \cap B(X, \rho)$. Alors $\overline{D(A)}$ est convexe.

Démonstration de la Proposition 1.21. D'après l'hypothèse et le lemme

1.8., $\overline{D(A)}$ est convexe. Considérons l'application S qui à $x \in \overline{D(A)}$ fait correspondre la valeur en T de la solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = x$. Considérant $x \in \overline{D(A)}$ fixé, soit u_n la solution faible de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f$ telle que $u_n(0) = S^n x$. On a $S^{n+1}x = u_n(T)$ et comme S est une contraction, $|u_n(0)| - |u_n(T)| \leq |S^{n+1}x - S^n x| \leq |Sx - x|$. Donc d'après le lemme 1.7. u_n est uniformément borné sur $[0, T]$; en particulier $S^n x$ est borné, d'où par application d'un théorème de Browder-Petryschyn [15] (cf. aussi [10]), S admet un point fixe.

Démonstration du lemme 1.7. : On se ramène aisément au cas où u_n est solution forte de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$. D'après l'hypothèse si u_n n'était pas uniformément borné, $|u_n(0)|$ serait non borné et donc aussi $|u_n(T)|$. On peut donc toujours supposer $|u_n(t)| \rightarrow +\infty$ pour tout $t \in [0, T]$ et d'après l'hypothèse de coercivité,

$$\frac{\langle f_n(t) - \frac{du_n}{dt}(t) - y_0, u_n(t) - x_0 \rangle_s}{|u_n(t) - x_0|} \rightarrow +\infty \text{ p.p. } t \in]0, T[.$$

$$\text{Or } \frac{\langle f_n(t) - \frac{du_n}{dt}(t) - y_0, u_n(t) - x_0 \rangle_s}{|u_n(t) - x_0|} \leq |f_n(t) - y_0| - \frac{d}{dt} |u_n(t) - x_0|$$

$$\text{donc } \int_0^T \frac{\langle f_n(t) - \frac{du_n}{dt}(t) - y_0, u_n(t) - x_0 \rangle_s}{|u_n(t) - x_0|} dt \leq \int_0^T |f_n(t) - y_0| dt + |u_n(0) - x_0| - |u_n(T) - x_0|$$

est borné, ce qui est contradictoire.

Démonstration du lemme 1.8. : On peut toujours supposer A fermé. Il suffit de démontrer que pour $x, y \in D(A)$, $\Delta = \{t \in [0, 1]; tx + (1-t)y \in \overline{D(A)}\}$ est égal à $[0, 1]$; or Δ est fermé, il suffit donc de démontrer qu'il est ouvert, c'est-à-dire qu'étant donné $x \in \overline{D(A)}$, $y \in D(A)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $t \in [0, \eta]$, $ty + (1-t)x \in \overline{D(A)}$.

D'abord il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $y \in R(I + \lambda A)$ pour tout $\lambda \leq \lambda_0$. En effet soit $\lambda_n \downarrow 0$, $\rho > 0$ tel que $\bigcap_n R(I + \lambda_n A) \supset \overline{\text{conv } D(A)} \cap B(y, \rho) = C$.

Considérons pour $\lambda > \lambda_n$ l'application $S : \xi \in C \mapsto J_{\lambda_n} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda} y + \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda} \xi \right)$;

on a $S(\xi) \in D(A)$ et $|S(\xi) - y| \leq \left| \frac{\lambda_n}{\lambda} y + \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda} \xi - y \right| + \lambda_n |Ay|$
 $\leq \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda} \rho + \lambda_n |Ay|$; donc si $\lambda \leq \rho / |Ay|$,
 $S(\xi) \in C$; puisque S est strictement contractante, il existe $\xi \in C$
tel que $\xi \in J_{\lambda_n} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda} y + \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda} \xi \right)$, soit $y \in \xi + \lambda A \xi$. Donc $y \in R(I + \lambda A)$
pour $\lambda \leq \rho / |Ay|$.

Considérons alors $x \in \overline{D(A)}$ et $\lambda_n \downarrow 0$, $\rho > 0$ tels que
 $\bigcap_n R(I + \lambda_n A) \supset \overline{\text{conv}} D(A) \cap B(x, \rho)$. Pour $0 \leq t \leq \eta = \frac{\rho}{|y-x|}$,
 $ty + (1-t)x \in \bigcap_n R(I + \lambda_n A)$; pour $\lambda_n \leq \lambda_0$, on a
 $|J_{\lambda_n}(ty + (1-t)x) - J_{\lambda_n} x| \leq t|y-x|$ et $|J_{\lambda_n}(ty + (1-t)x) - J_{\lambda_n} y| \leq (1-t)|y-x|$.
D'autre part $J_{\lambda_n} x \rightarrow x$ et $J_{\lambda_n} y \rightarrow y$. Soit (n_k) suite
telle que $J_{\lambda_{n_k}}(ty + (1-t)x) \rightarrow z$, on a
 $|z-x| \leq t|y-x|$ et $|z-y| \leq (1-t)|y-x|$, donc $z = ty + (1-t)x$, donc
 $J_{\lambda_n}(ty + (1-t)x) \rightarrow ty + (1-t)x$; enfin $J_{\lambda_n}(ty + (1-t)x) - J_{\lambda_n} x \rightarrow t(y-x)$
et $|J_{\lambda_n}(ty + (1-t)x) - J_{\lambda_n} x| \leq t|y-x|$, donc $J_{\lambda_n}(ty + (1-t)x) \rightarrow ty + (1-t)x$
ce qui montre que $ty + (1-t)x \in \overline{D(A)}$.

Remarque 1.11. La proposition 1.21. généralise un résultat que nous
avons démontré dans [3]. Le lemme 1.8. généralise un résultat de
Crandall rapporté dans [11].

Nous obtenons un résultat analogue dans un espace de dimension
finie quelconque pour un opérateur m -accrétif.

Proposition 1.22. Supposons X de dimension finie. Soient A m -accrétif
et $f \in L^1(0, T; X)$. Supposons A coercif au sens de la proposition
1.21. Alors il existe une solution faible u de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle
que $u(0) = u(T)$.

Démonstration : D'abord il existe $\lambda_n \downarrow 0$ tel que $J_{\lambda_n} x \rightarrow \rho(x)$ pour
tout $x \in X$ et on a ρ contraction de X dans $\overline{D(A)}$ et $\rho(x) = x$
pour tout $x \in \overline{D(A)}$. Considérons l'application S qui à $x \in X$ fait

correspondre la valeur en T de la solution faible u de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = \varphi(x)$. Considérons $x_0 \in \overline{D(A)}$ fixé, $\{S^n x_0\}$ est borné d'après le lemme 1.7. . Posons $R = |x_0| + \sup\{|S^n x_0|; n \geq 0\}$ et $C_0 = \bigcup_n \{x \in X; |x - S^k x_0| \leq R, \forall k \geq n\}$. On a $x_0 \in C_0$, $S C_0 \subset C_0$ puisque S est une contraction, C_0 borné convexe. Donc S est une contraction du convexe compact $\overline{C_0}$ dans lui-même, et admet donc un point fixe x . Puisque $SX \subset \overline{D(A)}$, $x \in \overline{D(A)}$ est la solution u de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = x$ vérifie $u(0) = u(T)$.

6. Convergence.

Notons d'abord le résultat général :

Proposition 1.23. Soient A^n, A opérateurs accréatifs, $f_n, f \in L^1(0, T; X)$, u_n, u solutions intégrales de $\frac{du_n}{dt} + A^n u_n \ni f_n$ et $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ respectivement. On suppose :

- a) $u(0) \in \overline{D(A)}$ et il existe $x_n \in \overline{D(A^n)}$ tels que $x_n \rightarrow u(0)$.
- b) $f_n \rightarrow f$ dans L^1 et $u_n(0) \rightarrow u(0)$.
- c) Il existe $\lambda_k \downarrow 0$ tel que

$$- \bigcap_k \overline{R(I + \lambda_k(A^n - f(t)))} \supset D(A^n), \forall n, \text{ p.p.t}$$

- pour toute suite $\xi_n \in D(A^n)$ telle que $\xi_n \rightarrow \xi \in D(A)$, on a

$$(I + \lambda_k(\overline{A^n - f(t)}))^{-1} \xi_n \rightarrow (I + \lambda_k(\overline{A - f(t)}))^{-1} \xi, \forall k, \text{ p.p.t.}$$

Alors $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0, T]; X)$.

Démonstration : On peut toujours supposer A^n, A fermés. Notons

$S = \{y \in X; \bigcap_k \overline{R(I + \lambda_k(A^n - y))} \supset \overline{D(A^n)} \text{ pour tout } n \text{ et pour toute suite}$

$\xi_n \in \overline{D(A^n)}$ telle que $\xi_n \rightarrow \xi \in \overline{D(A)}$, on a

$$(I + \lambda_k(A^n - y))^{-1} \xi_n \rightarrow (I + \lambda_k(A - y))^{-1} \xi \text{ pour tout } k\}.$$

D'après l'hypothèse $f(t) \in S$ p.p.t. Puisque $S \subset S(A^n, \overline{D(A^n)})$ pour tout n , il suffit de démontrer la proposition avec $f_n = f$ fonction en escalier et $u_n(0) \in \overline{D(A^n)}$. En effet alors, étant donné $\varepsilon > 0$,

soit g fonction en escalier à valeurs dans S telle que $\|g-f\|_{L^1} \leq \varepsilon$.

Notant v_n la bonne solution de $\frac{dv_n}{dt} + A^n v_n \ni g$, $v_n(0) = x_n$ et v la bonne solution de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$, $v(0) = u(0)$, on aura $v_n \rightarrow v$ dans $\mathcal{C}([0, T]; X)$.

Puisque

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^\infty} &\leq \|u_n - v_n\|_{L^\infty} + \|v_n - v\|_{L^\infty} + \|v - u\|_{L^\infty} \\ &\leq |u_n(0) - x_n| + \|f_n - g\|_{L^1} + \|v_n - v\|_{L^\infty} + \|f - g\|_{L^1} \end{aligned}$$

on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{L^\infty} \leq 2\varepsilon$ et puisque ε est arbitraire $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0, T]; X)$.

Raisonnant par pas il suffit donc de démontrer la proposition avec $f_n = f = 0$ et $u_n(0) = x_n \in D(A^n)$. Soit alors r entier fixé

et w_n la bonne solution de $\frac{dw_n}{dt} + A^n w_n \ni 0$, $w_n(0) = (I + \lambda_r A)^{-1} x_n$ et w la bonne solution de $\frac{dw}{dt} + Aw \ni 0$, $w(0) = (I + \lambda_r A^n)^{-1} u(0)$. D'après [1], estimation 1.9.,

$$|w_n(t) - (I + \lambda_k A^n)^{-[t/\lambda_k]} w_n(0)| \leq 3(\lambda_k + (t\lambda_k)^{1/2}) |A^n w_n(0)|$$

$$\text{et } |w(t) - (I + \lambda_k A)^{-[t/\lambda_k]} w(0)| \leq 3(\lambda_k + (t\lambda_k)^{1/2}) |Aw(0)|.$$

Or $|A^n w_n(0)| \leq |A_{\lambda_r}^n x_n|$ et $A_{\lambda_r}^n x_n \rightarrow A_{\lambda_r} u(0)$; donc il existe une constante C (ne dépendant que de r) telle que pour tout k ,

$$|w_n(t) - w(t)| \leq C\lambda_k^{1/2} + |(I + \lambda_k A^n)^{-[t/\lambda_k]} w_n(0) - (I + \lambda_k A)^{-[t/\lambda_k]} w(0)|.$$

Mais, par récurrence, pour tout $m \geq 0$, $(I + \lambda_k A^n)^{-m} w_n(0) \rightarrow (I + \lambda_k A)^{-m} w(0)$ donc, puisque $\{[t/\lambda_k]; t \in [0, T]\}$ est fixé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n - w\|_{L^\infty} \leq C\lambda_k^{1/2}.$$

Ceci étant vrai pour tout k , $w_n \rightarrow w$ dans $\mathcal{C}([0, T]; X)$.

$$\text{Mais } \|u_n - u\|_{L^\infty} \leq |w_n(0) - x_n| + |w(0) - u(0)| + \|w_n - w\|_{L^\infty}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{L^\infty} \leq 2|w(0) - u(0)|.$$

Ceci étant vrai pour tout r et puisque $(I + \lambda_r A)^{-1} u(0) \rightarrow u(0)$ lorsque $r \rightarrow +\infty$, on a $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0, T]; X)$.

Remarque 1.12. La proposition 1.23. généralise un résultat de Brézis-Pazy [] qui le démontre pour $f_n = f = 0$, $u_n(0) = u(0) \in \bigcap_n \overline{D(A^n)}$. Il est intéressant de noter que nous ne faisons aucune hypothèse sur $[u_n, f_n]$. Remarquons aussi que nous aurions pu localiser les conditions c).

Corollaire 1.9. Soient A opérateur m -accrétif, $f \in L^1(0, T; X)$, $u_0 \in \overline{D(A)}$. la solution (forte) u_λ de $\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = f$, $u_\lambda(0) = u_0$, converge uniformément vers la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$.

Remarque 1.13. On peut aussi considérer la solution forte de

$\frac{du_\lambda}{dt} + (A-f)_\lambda v_\lambda = 0$, $v_\lambda(0) = 0$. Puisque $(A-y)_\lambda x = A_\lambda(x + \lambda y) - y$, lorsque $f \in W^{1,1}(0, T; X)$, on se ramène au problème précédent en posant $u_\lambda = v_\lambda + \lambda f$. Il faut cependant noter que l'on peut définir la solution forte de $\frac{dv_\lambda}{dt} + (A-f)_\lambda v_\lambda = 0$ dès que $R(I + \lambda(A-f(t))) \supset \overline{\text{conv } D(A)}$ pour tout $\lambda > 0$ et p.p.t; il est possible que l'on ait encore la convergence de v_λ vers la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. Nous n'avons pas étudié ce problème qui semble un cas particulier d'un résultat plus général sur les équations d'évolution dépendant du temps. (*)

Proposition 1.24. Soient A^n , A opérateurs m -accrétifs et $T \in]0, +\infty[$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $(I + \lambda A^n)^{-1} \xi \rightarrow (I + \lambda A)^{-1} \xi$, $\forall \xi \in X$, $\forall \lambda > 0$.
- ii) a) Pour tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe $x_n \in D(A^n)$ tels que $x_n \rightarrow x$
 b) Pour tout $[u_n, f_n] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$ telle que u_n soit solution intégrale de $\frac{du_n}{dt} + A^n u_n \ni f_n$, $f_n \rightarrow f$ dans L^1 , $u_n(0) \rightarrow u_0$ avec $u_0 \in \overline{D(A)}$, on a u_n converge uniformément sur $[0, T]$ vers la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$.
- iii) a) Il existe $x_n \in \overline{D(A^n)}$ telle que $x_n \rightarrow x \in \overline{D(A)}$.
 b) Pour tout $\xi_n \in \overline{D(A^n)}$ telle que $\xi_n \rightarrow \xi \in \overline{D(A)}$ et tout

(*) cf. sur ce problème l'article de Crandall et Pazy [23].

$y \in X$, la solution intégrale u_n de $\frac{du_n}{dt} + A^n u_n \ni y$, $u_n(0) = \xi_n$ converge dans $\mathcal{C}([0, +\infty[; X)$ vers la solution intégrale u de $\frac{du}{dt} + Au \ni y$, $u(0) = \xi$.

Démonstration : Démontrons i) $\Rightarrow$ ii). Etant donné $x \in \overline{D(A)}$, $(I + \lambda A)^{-1}x \rightarrow x$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Puisque $(I + \lambda A^n)^{-1}x \in D(A^n)$, le a) résulte de i). Quant au b), c'est un corollaire de la proposition 1.23.

L'implication ii) $\Rightarrow$ iii) est évidente. Démontrons iii) $\Rightarrow$ i). D'abord étant donné $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[; X)$ et $\xi_n \in \overline{D(A^n)}$ tels que $\xi_n \rightarrow \xi \in \overline{D(A)}$, la solution intégrale de $\frac{du_n}{dt} + A^n u_n \ni f$, $u_n(0) = \xi_n$ converge dans $\mathcal{C}([0, +\infty[; X)$ vers la solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = \xi$. Il suffit d'approcher f dans $L^1_{loc}([0, +\infty[; X)$ par une fonction en escalier et d'appliquer b) à chaque pas.

Ensuite, étant donné $y \in X$, la solution intégrale u_n de $\frac{du_n}{dt} + A^n u_n + u_n \ni y$, $u_n(0) = x_n$ converge dans $\mathcal{C}([0, +\infty[; X)$ vers la solution u de $\frac{du}{dt} + Au + u \ni y$, $u(0) = x$. En effet u_n s'obtient comme point fixe de $\mathcal{J}_n : v_n \mapsto \mathcal{J}_n v_n$ solution intégrale de $\frac{dw_n}{dt} + A^n w_n \ni y - v_n$, $w_n(0) = x_n$ et $\mathcal{J}_n^k$ est dans $\mathcal{C}([0, T]; X)$ lipchitzien de rapport $\frac{T^k}{k!}$.

On a alors $u_n(t) \rightarrow (I + A^n)^{-1}y$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ avec l'estimation (cf. proposition 1.16), $|u_n(t) - (I + A^n)^{-1}y| \leq e^{-t} |x_n - (I + A^n)^{-1}y|$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. D'où

$|(I + A^n)^{-1}y - (I + A)^{-1}y| \leq |u_n(t) - u(t)| + e^{-t} \{ |x_n - (I + A^n)^{-1}y| + |x - (I + A)^{-1}y| \}$ soit encore pour $t \in]0, +\infty[$,

$|(I + A^n)^{-1}y - (I + A)^{-1}y| \leq \frac{1}{1 - e^{-t}} \{ |u_n(t) - u(t)| + e^{-t} \{ |x_n - (I + A)^{-1}y| + |x - (I + A)^{-1}y| \} \}$

et à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, puisque $u_n(t) \rightarrow u(t)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(I + A^n)^{-1}y - (I + A)^{-1}y| \leq \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-t}} |x - (I + A)^{-1}y|.$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in]0, +\infty[$, $(I + A^n)^{-1}y \rightarrow (I + A)^{-1}y$.
 Les propriétés de iii) étant invariantes par homothétie, on a bien
 iii) $\Rightarrow$ i).

Remarque 1.14. Nous avons démontré dans [2], pour des opérateurs maximaux monotones A^n , A d'un espace de Hilbert vérifiant $\bigcap_n D(A^n) \supset D(A)$, l'équivalence entre

$$i) \quad J_{\lambda}^{A^n} x \rightarrow J_{\lambda}^A x, \quad \forall x \in \overline{D(A)}, \quad \forall \lambda > 0$$

$$ii) \quad S^{A^n}(t)x \rightarrow S^A(t)x \text{ uniformément sur tout compact de } [0, +\infty[, \\ \forall x \in \overline{D(A)}.$$

Puisque $J_{\lambda}^{A-y} x = J_{\lambda}^A (x + \lambda y)$, on en déduit aisément dans ce cas les équivalences de la proposition 1.24.

Le résultat de [2] ne s'étend certainement pas au cas d'un espace de Banach quelconque puisque un semi-groupe peut-être pseudo-engendré par des opérateurs m -accrétifs distincts (cf. [22]).

Remarquons que l'on peut dans la proposition 1.24, affaiblir la condition iii) en supposant seulement qu'il y a convergence dans $L_{loc}^1([0, +\infty[; X)$, contrairement au cas traité dans [2] où la convergence dans $\mathcal{C}([0, +\infty[; X)$ est indispensable.

Corollaire 1.10. Soient A^n opérateurs m -accrétifs. Considérons

$C = \{x \in X; \text{ pour tout } y \in X, \text{ il existe } x_n \in \overline{D(A^n)} \text{ tels que } x_n \rightarrow x \text{ et la solution intégrale } u_n \text{ de } \frac{du_n}{dt} + A^n u_n \ni y, u_n(0) = x_n \text{ converge dans } \mathcal{C}([0, +\infty[; X)\}.$

Si $C \neq \emptyset$, alors il existe A m -accrétif unique tel que

$$J_{\lambda}^{A^n} x \rightarrow J_{\lambda}^A x, \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda > 0;$$

De plus $\overline{D(A)} = C$.

En effet, il est immédiat que C est fermé et que si pour deux suites $x_n, x'_n \in \overline{D(A^n)}$ telles que $x_n \rightarrow x, x'_n \rightarrow x$,

$S^{A^n-y}(t)x_n$ et $S^{A^n-y}(t)x'_n$ convergent dans $\mathcal{C}([0, +\infty[; X)$, alors

$\lim_{n \rightarrow \infty} S^{A^n-y}(t)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{A^n-y}(t)x'_n$; notons $S_y(t)x$ cette limite. Par

passage à la limite, on vérifie facilement que $(C, S_Y(t))$ vérifie les conditions du corollaire 1.8. . Le corollaire 1.10 se déduit alors de la proposition 1.24.

7. Diverses remarques et généralisations.

A. Affaiblissement de la notion de solution intégrale.

Nous avons supposé, par définition, qu'une solution intégrale était continue. Nous n'avons pas besoin, en fait, de cette hypothèse pour développer notre théorie. En vue des applications, précisons les résultats suivants :

Proposition 1.25. Soient $A \in \mathcal{A}$, $[u, f]$ vérifiant les conditions du théorème 1.1. et $[v, g] \in L^\infty(0, T; X) \times L^1_{\text{loc}}(0, T; X)$ vérifiant :

$$\frac{1}{2}|v(t)-x|^2 \leq \frac{1}{2}|v(s)-x|^2 + \int_s^t \langle g(\tau)-y, v(\tau)-x \rangle_s d\tau$$

$$\forall [x, y] \in A, \text{ p.p. } s, t \in]0, T[, \quad s \leq t.$$

Alors :

$$\frac{1}{2}|v(t)-u(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|v(s)-u(s)|^2 + \int_s^t \langle g(\tau)-f(\tau), v(\tau)-u(\tau) \rangle_s d\tau$$

$$\text{p.p. } s, t \in]0, T[, \quad s \leq t.$$

En effet d'après la proposition 0.11., la condition vérifiée par $[v, g]$ est en fait vérifiée pour tout $s, t \in]0, T[, \quad s \leq t$, s et t points de Lebesgue de v . Il suffit alors de reprendre mot à mot la démonstration du théorème 1.1.

Corollaire 1.11. Soient $A \in \mathcal{A}$, $[u, f] \in L^\infty(0, T; \overline{D(A)}) \times L^1(0, T; S(A, \hat{D}(A)))$, vérifiant

$$\frac{1}{2}|u(t)-x|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 + \int_s^t \langle f(\tau)-y, u(\tau)-x \rangle_s d\tau$$

$$\forall [x, y] \in A, \text{ p.p. } s, t \in]0, T[, \quad s \leq t.$$

Alors il existe $u_1 = u$ p.p. bonne solution sur $]0, T]$ de $\frac{du_1}{dt} + Au_1 \ni f$.

Ce corollaire se déduit de la proposition 1.25 et du théorème 1.3. Remarquons que si A est m -accrétif, on peut le déduire directement

du théorème 1.3. (ou de la proposition 1.15 par un argument de maximalité.

B. Opérateurs ω -accrétifs.

Par souci de simplicité, nous nous sommes bornés à l'étude des solutions intégrales d'équations définies par des opérateurs accrétifs. En fait toute la théorie peut être développée dans le cadre des opérateurs ω -accrétifs, c'est-à-dire des opérateurs A tels que $A + \omega I$ soit accrétif. Développons quelques résultats de ce cadre plus large.

Notons $\mathcal{Q}_\omega$ l'ensemble des opérateurs A de X tels qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $A + \omega I \in \mathcal{Q}$. Pour $A \in \mathcal{Q}_\omega$, nous poserons $\omega(A) = \inf\{\omega \in \mathbb{R}; A + \omega I \in \mathcal{Q}\}$. Etant donné $[u, f] \in \mathcal{C}(\mathcal{I}; X) \times L^1(\mathcal{I}; X)$, $A \in \mathcal{Q}_\omega$, et $\omega \geq \omega(A)$, nous dirons que u est solution intégrale de type ω sur $\mathcal{I}$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ si

$$\frac{1}{2} |u(t) - x|^2 \leq e^{2\omega(t-s)} \frac{1}{2} |u(s) - x|^2 + \int_s^t e^{2\omega(t-\tau)} \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle_s d\tau$$

$$\forall [x, y] \in A, \quad \forall s, t \in \mathcal{I}, \quad s \leq t.$$

Etant donné $A \in \mathcal{Q}_\omega$ et $[u, f] \in \mathcal{C}(\mathcal{I}; X) \times L^1(\mathcal{I}; X)$, nous dirons que u est bonne solution sur $\mathcal{I}$ de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ si pour tout sur-espace X_1 , pour tout sous-intervalle $\mathcal{I}_1$, pour tout $\omega \geq \omega(A)$, pour tout $[v, f] \in \mathcal{C}(\mathcal{I}_1; X_1) \times L^1(\mathcal{I}_1; X_1)$ tel que v soit solution intégrale du type ω sur $\mathcal{I}_1$ de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$, on ait

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u(t) - v(t)|^2 &\leq \frac{1}{2} e^{2\omega(t-s)} |u(s) - v(s)|^2 \\ &\quad + \int_s^t e^{2\omega(t-\tau)} \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_s d\tau \end{aligned}$$

$$\forall s, t \in \mathcal{I}_1, \quad s \leq t.$$

Avec ces définitions, les théorèmes 1.1. et 1.3. restent valables. On a donc en particulier comme corollaire le résultat suivant plus général que le lemme 1.6. :

Proposition 1.26. Soient $A \in \mathcal{Q}_\omega$, $[u_i, f_i] \in \mathcal{C}([0, T]; \overline{D(A)}) \times L^1(0, T; S(A, \hat{D}(A)))$ tels que u_i soit solution intégrale de type $\omega_i \geq \omega(A)$ de $\frac{du_i}{dt} + Au_i \ni f_i$

Alors pour tout $\omega \geq \omega(A)$, pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\frac{1}{2} |u_1(t) - u_2(t)|^2 \leq \frac{1}{2} e^{2\omega(t-s)} |u_1(s) - u_2(s)|^2 \\ + \int_s^t e^{2\omega(t-\tau)} \langle f_1(\tau) - f_2(\tau), u_1(\tau) - u_2(\tau) \rangle_s d\tau.$$

C. Opérateurs ϕ -accrétifs.

Soit $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexe continu. Posons

$$\phi_s = [x, y] \in X \times X \rightarrow \phi_s(y, x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\phi(x + ty) - \phi(x)}{t}.$$

Le "produit" ϕ_s jouit des mêmes propriétés que le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ (cf. [32] ou [34]).

On dit qu'un opérateur A est ϕ -accrétif si

$$\phi_s(y - y', x - x') \geq 0 \quad \forall [x, y], [x', y'] \in A.$$

Utilisant les résultats développés par C. Picard [34], on peut reprendre la théorie des solutions intégrales pour un opérateur ϕ -accrétif. En vue des applications, donnons quelques précisions.

Soit A un opérateur ϕ -accrétif. Etant donné $[u, f] \in \mathcal{C}(J; X) \times L^1(J, X)$ nous dirons que u est ϕ -solution intégrale à gauche (resp. à droite) sur J de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ si

$$\phi(u(t) - x) \leq \phi(u(s) - x) + \int_s^t \phi_s(f(\tau) - y, u(\tau) - x) d\tau \quad \forall [x, y] \in A, \quad \forall s, t \in J, s \leq t \\ (\text{resp. } \phi(x - u(t)) \leq \phi(x - u(s)) + \int_s^t \phi_s(y - f(\tau), x - u(\tau)) d\tau).$$

On généralise alors aisément le théorème 1.1.

Proposition 1.27. Soient A ϕ -accrétif et $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$ vérifiant les conditions du théorème 1.1. Alors pour tout $[v, g] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$ tel que v soit solution intégrale à gauche (resp. à droite) de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$, on a pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\phi(v(t) - u(t)) \leq \phi(u(s) - u(s)) + \int_s^t \phi_s(g(\tau) - f(\tau), v(\tau) - u(\tau)) d\tau \\ (\text{resp. } \phi(u(t) - v(t)) \leq \phi(u(s) - v(s)) + \int_s^t \phi_s(f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau)) d\tau).$$

La généralisation du théorème de Crandall-Liggett par C. Picard [34] permet d'énoncer l'équivalent du théorème 1.3. Cependant les difficultés de généraliser le théorème 1.2. ne nous permettent pas de localiser le problème.

Proposition 1.28. Supposons X ϕ -complet et ϕ lipschitzienne. Soient A ϕ -accrétif et $f \in L^1(0, T; X)$ tel que

$$R(I + \lambda(A - f(t))) \supset D(A) \quad \text{p.p.t, } \forall \lambda > 0,$$

et $u_0 \in \overline{D(A)}$. Il existe une ϕ -solution intégrale à gauche (ou à droite) unique de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = x$.

De plus pour tout $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexe continue telle que A soit ψ -accrétif et tout $[v, g] \in \mathcal{C}([0, T]; X) \times L^1(0, T; X)$ telle que v soit ψ -solution intégrale à gauche (resp. à droite) de $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$, on a pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\psi(v(t) - u(t)) \leq \psi(v(s) - u(s)) + \int_s^t \psi_s(g(\tau) - f(\tau), v(\tau) - u(\tau)) \, d\tau$$

$$(\text{resp. } \psi(u(t) - v(t)) \leq \psi(u(s) - v(s)) + \int_s^t \psi_s(f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau)) \, d\tau).$$

-:-:-:-

CHAPITRE II. EQUATIONS D'EVOLUTION DANS LES ESPACES $L^1(\Omega)$.

1. Généralités.

Soit Ω un espace mesuré de mesure dx . Pratiquement Ω sera un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue. Nous nous proposons d'étudier plusieurs exemples d'équations d'évolution définies par des opérateurs accréatifs dans $L^1(\Omega)$.

Nous poserons :

$$(1) \quad \text{sign}_0 r = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}, \quad \text{sign } r = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ [-1, +1] & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

L'application de dualité dans $L^1(\Omega)$ est définie par

$$(2) \quad F : u \in L^1(\Omega) \mapsto \{w \in L^\infty(\Omega); w(x) \in \|u\|_1 \text{ sign } u(x) \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

et le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ par

$$(3) \quad \langle v, u \rangle_s = \left\{ \int (\text{sign}_0 u(x)) v(x) + \int_{u=0} |v(x)| \right\} \|u\|_1 .$$

Un opérateur A de $L^1(\Omega)$ est donc accréatif ssi

$$(4) \quad \int (\text{sign}_0 (u_1 - u_2)) (v_1 - v_2) + \int_{u_1 = u_2} |v_1 - v_2| \geq 0 \quad \forall [u_i, v_i] \in A, i=1,2 .$$

ou encore ssi

$$(5) \quad \forall [u_i, v_i] \in A, i=1,2, \exists \alpha \in L^\infty(\Omega), \\ \left[\alpha(x) \in \text{sign}(u_1(x) - u_2(x)) \text{ p.p. } x \text{ et } \int \alpha(v_1 - v_2) \geq 0 . \right.$$

Etant donné A accréatif et $[u, f] \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega)) \times L^1(0, T; L^1(\Omega))$, u est solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ ssi

$$(6) \quad \|u(t) - u_0\|_1 \leq \|u(s) - u_0\|_1 + \int_s^t d\tau \left\{ \int_{u(\tau) = u_0} |f(\tau) - v_0| + \int (\text{sign}_0 (u(\tau) - u_0)) (f(\tau) - v_0) \right\}$$

pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et tout $[u_0, v_0] \in A$.

Ou encore, compte tenu de la Proposition 1.11., ssi

$$(7) \quad \left[\begin{array}{l} \forall [u_0, v_0] \in A, \forall \gamma \in D^+(\cdot]0, T[), \exists \alpha \in L^\infty(\cdot]0, T[\times \Omega) \text{ tel que} \\ \alpha(t, x) \in \text{sign}(u(t, x) - u_0(x)) \text{ p.p. } (t, x) \text{ et} \\ \int_{\cdot]0, T[\times \Omega} \alpha(t, x) \{(u(t, x) - u_0(x))\gamma'(t) + (f(t, x) - v_0(x))\gamma(t)\} dx dt \geq 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que les inégalités (7) ont un sens dès que $[u, f] \in [L^1(\cdot]0, T[\times \Omega)]^2$.

Compte tenu des résultats du chapitre I, nous avons :

Proposition 2.1. Soit A un opérateur accréatif de $L^1(\Omega)$ avec $R(I+A) = L^1(\Omega)$. Pour tout $f \in L^1(\cdot]0, T[\times \Omega)$ et tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe $u \in L^1(\cdot]0, T[\times \Omega)$ unique tel que :

a) $[u, f]$ vérifie les inégalités (7)

b) $u(t) \rightarrow u_0$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow 0$ essentiellement.

De plus, $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega))$ et pour tout $[v, g] \in (L^1(\cdot]0, T[\times \Omega))^2$ vérifiant les inégalités (7), on a

$$(8) \quad \left[\begin{array}{l} \forall \gamma \in D^+(\cdot]0, T[), \exists \alpha \in L^\infty(\cdot]0, T[\times \Omega), \\ \alpha(t, x) \in \text{sign}(u(t, x) - v(t, x)) \text{ p.p. } (t, x) \text{ et} \\ \int \alpha \{(u - v)\gamma' + (f - g)\gamma\} \geq 0. \end{array} \right.$$

La fonction convexe $u \in L^1(\Omega) \mapsto \|u^+\|_1$ a pour sous-différentielle

$$u \mapsto \{w \in L^\infty(\Omega); w(x) \in \text{sign}^+ u(x) \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

$$\text{où } \text{sign}^+ r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ [0, 1] & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r > 0 \end{cases}.$$

Nous dirons qu'un opérateur A est T-accréatif s'il est accréatif pour cette fonction convexe, i.e. ssi

$$(9) \quad \int_{u_1 = u_0} (v_1 - v_2)^+ + \int_{u_1 > u_0} v_1 - v_2 \geq 0 \quad \forall [u_i, v_i] \in A, i=1, 2.$$

Ou encore ssi

$$(10) \quad \left[\begin{array}{l} \forall [u_i, v_i] \in A, i=1, 2, \exists \alpha \in L^\infty(\Omega), \alpha(x) \in \text{sign}^+(u_1(x) - u_2(x)) \\ \text{p.p. } x \text{ et} \\ \int \alpha(v_1 - v_2) \geq 0. \end{array} \right.$$

Remarquons que notre définition d'opérateur T-accrétif diffère légèrement de celle prise par Calvert dans [16], [17] ou Konishi [27], Sato [36]. On renvoie à Picard [34], pour l'étude de cette différence.

Il résulte de la Proposition 1.28 que :

Proposition 2.2. Soient A un opérateur T-accrétif de $L^1(\Omega)$ avec $R(I+A) = L^1(\Omega)$, $f, g \in L^1([0, T[\times \Omega)$, $u_0, v_0 \in D(A)$, u, v les solutions intégrales de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$ et $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$, $v(0) = v_0$ respectivement. On a

$$(11) \quad \begin{aligned} & \forall \gamma \in D^+([0, T[), \exists \alpha \in L^\infty([0, T[\times \Omega), \\ & \alpha(t, x) \in \text{sign}^+(u(t, x) - v(t, x)) \quad \text{p.p.} \\ & \text{et } \int \alpha \{ (u-v)\gamma' + (f-g)\gamma \} \geq 0. \end{aligned}$$

En particulier si $u_0 \leq v_0$ et $f \leq g$, alors $u \leq v$.

Nous rencontrerons des opérateurs vérifiant des propriétés supplémentaires. Notons

$P = \{p \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ croissante lipschitzienne à dérivée à support compact} \}$

$\tilde{P} = \{p \in P; p(+\infty) + p(-\infty) = 0\}$

P_0 (resp. $\tilde{P}_0$) = $\{p \in P$ (resp. $\tilde{P}$) ; $p(0) = 0\}$.

Définition 2.1. Nous dirons qu'un opérateur A de $L^1(\Omega)$ vérifie la propriété (M) (resp. $(\tilde{M})$, (M_0) , $(\tilde{M}_0)$) si

$$\forall p \in P \text{ (resp. } \tilde{P}, P_0, \tilde{P}_0), \forall [u, v] \in A, \int p(u)v \geq 0.$$

Remarquons que si A vérifie l'une des propriétés (M), il en est de même de sa fermeture. Remarquons d'autre part que A vérifie la propriété (M) ssi A vérifie la propriété $\tilde{M}$ et $R(A) \subset \{v \in L^1(\Omega); \int v = 0\}$.

Proposition 2.3. Soit A opérateur accrétif de $L^1(\Omega)$ avec $R(I+A) = L^1(\Omega)$ et vérifiant la propriété $(\tilde{M})$ (resp. $\tilde{M}_0$). Alors pour tout $j = \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ convexe s.c.i. propre (resp et $j(0) = 0$), on a

$$\int j(J_\lambda^A h) \leq \int j(h) \quad \forall \lambda > 0, \forall h \in D(J_\lambda^A).$$

Démonstration : Soit j_μ la régularisée de j (cf. []). Pour tout $h \in L^1(\Omega)$, $\int j_\mu(h) \uparrow \int j(h)$ lorsque $\mu \downarrow 0$. On peut donc supposer j à dérivée lipschitzienne. On peut toujours supposer A fermé, i.e. $R(I+A) = L^1(\Omega)$.

Etant donné $h \in L^1(\Omega)$, posons

$$h_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |h| > n \\ h & \text{si } |h| \leq n \end{cases} \quad P_n = \begin{cases} a_n & \text{si } r \geq n+1 \\ (a_n - j'(n)(r-n) + j'(n)) & \text{si } n < r < n+1 \\ j' & \text{si } |r| \leq n \\ (a_n + j'(-n)(r+n) + j'(-n)) & \text{si } -n-1 < r < -n \\ -a_n & \text{si } r \leq -n-1 \end{cases}$$

où $a_n = \sup(j'(n), -j'(-n))$. On a $p_n \in \widetilde{P}$ (resp. $\widetilde{P}_0$) ; posons

$$j_n(r) = j(0) + \int_0^r \gamma_n(s) ds.$$

Appliquant l'hypothèse puisque $[J_\lambda h_n, A_\lambda h_n] \in A$, on a

$$\int j_n(J_\lambda h_n) \leq \int j_n(h_n) = \int j(h_n).$$

Or $J_\lambda h_n \rightarrow J_\lambda h$ dans $L^1(\Omega)$ et donc après éventuellement extraction d'une sous-suite, $j_n((J_\lambda h_n)(x)) \rightarrow j((J_\lambda h)(x))$ p.p. $x \in \Omega$. Comme $\int j(h_n) \rightarrow \int j(h)$, on a par Fatou, $\int j(J_\lambda h) \leq \int j(h)$.

Remarque 2.1. Si $h \in D(J_\lambda^A) \cap L^\infty(\Omega)$, on a démontré $\int j(J_\lambda^A h) \leq \int j(h)$ sans utiliser l'accrétivité de A ni $\overline{R(I+A)} = L^1(\Omega)$.

Corollaire 2.1. Soit A opérateur accrétif de $L^1(\Omega)$ avec $\overline{R(I+A)} = L^1(\Omega)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) A vérifie la condition $(\widetilde{M}_0)$
- ii) A vérifie la condition (M_0)
- iii) A vérifie : pour tout $j = \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ convexe s.c.i. propre avec $j(0) = 0$, on a

$$\int j(J_\lambda^A h) \leq \int j(h), \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall h \in D(J_\lambda^A).$$

Démonstration : ii) $\Rightarrow$ i) trivialement ; i) $\Rightarrow$ iii) d'après la Proposition 2.3. Montrons iii) $\Rightarrow$ ii).

Etant donné $p \in P_0$, considérons $j(r) = \int_0^r p(s) ds$. On a $j(r) \leq kr$ avec $k = \|p\|_\infty$. Soit $[u, v] \in A$; d'après iii), $\int j(u) \leq \int j(u + \lambda v) < +\infty$ pour tout $\lambda > 0$; puisque $\frac{j(u + \lambda v) - j(u)}{\lambda} \downarrow p(u)v$ lorsque $\lambda \downarrow 0$, on a d'après Lebesgue $\int p(u)v \geq 0$.

Corollaire 2.2. Soit A opérateur accrétif de $L^1(\Omega)$ avec $\overline{R(I+A)} = L^1(\Omega)$ et vérifiant la condition $(\widetilde{M}_0)$. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\lambda > 0$, $h \in D(J_\lambda^A)$, on a

$$\|(J_\lambda^A h)^+\|_p \leq \|h^+\|_p \quad \text{et} \quad \|(J_\lambda^A h)^-\|_p \leq \|h^-\|_p.$$

En particulier si $h \geq 0$ (resp. ≤ 0), alors $J_\lambda^A h \geq 0$ (resp. ≤ 0) et

$$-\|h^-\|_\infty \leq J_\lambda^A h \leq \|h^+\|_\infty.$$

Démonstration : Pour $1 \leq p < +\infty$, le résultat est une conséquence immédiate de la Proposition 2.3. en prenant $j(r) = (r^+)^p$ et $j(r) = (r^-)^p$. Pour $p = +\infty$, il suffit d'utiliser le fait que si $h \in L^1(\Omega)$, $\|h\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|h\|_p$.

Remarque 2.2. Si $h \in D(J_\lambda^A) \cap L^\infty(\Omega)$, on a $-\|h^-\|_\infty \leq J_\lambda^A h \leq \|h^+\|_\infty$ sans utiliser l'accrétivité de A ni $\overline{R(I+A)} = L^1(\Omega)$. (cf. Remarque 2.1).

Corollaire 2.3. Supposons $\int_\Omega dx < +\infty$. Soit A accrétif dans $L^1(\Omega)$ avec $\overline{R(I+A)} = L^\infty(\Omega)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) A vérifie la condition $(\widetilde{M})$
- ii) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[k, 0] \in A$.

Démonstration : Supposons i) vérifié. Prenant $j(r) = |r - k|$, on a $\int |J_\lambda^A k - k| \leq \int |k - k| = 0$, donc $J_\lambda^A k = k$, c'est-à-dire $0 \in Ak$. Supposons alors ii) vérifié et soit $[u, v] \in A$. La fonction $\alpha : (k, x) \mapsto \text{sign}_0(u(x) - k)$ est mesurable et on a d'après (4),

$$g(k) = \int \alpha(k, x) v(x) dx + \int (1 - |\alpha(k, x)|) |v(x)| dx \geq 0.$$

Soit $p \in \widetilde{P}$ et considérons

$$\int g(k) p'(k) dk = \int v(x) dx \int \alpha(k, x) p'(k) dk + \int v(x) |dx \int (1 - |\alpha(k, x)|) p'(k) dk$$

$$\text{Or } \int \alpha(k, x) p'(k) dk = - \int_{-\infty}^{u(x)} p'(k) dk + \int_{u(x)}^{+\infty} p'(k) dk = 2p(u(x)) \quad \forall x \in \Omega .$$

$$\text{et } \int (1 - |\alpha(k, x)|) p'(k) dk = 0 \quad \forall x \in \Omega .$$

$$\text{Donc } \int p(u) v \geq 0 .$$

Notons enfin le résultat pour les solutions intégrales :

Proposition 2.4. Soient A accréatif vérifiant la condition $(\widetilde{M}_0)$ et $R(I+A) = L^1(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in L^1(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^1(\square]0, T[\times \Omega)$, $u_0 \in \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega)$ et u la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$. On a

$$u(t) \in L^p(\Omega) \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

$$\text{et } \|u(t)^+\|_p \leq \|u(s)^+\|_p + \int_s^t \|f(\tau)^+\|_p d\tau$$

$$\|u(t)^-\|_p \leq \|u(s)^-\|_p + \int_s^t \|f(\tau)^-\|_p d\tau \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T .$$

En particulier si $u_0 \geq 0$ (resp. ≤ 0) et $f \geq 0$ (resp. ≤ 0), alors $u \geq 0$ (resp. ≤ 0).

Cela résulte du Corollaire 2.2. et du lemme général suivant :

Lemme 2.1. Soient A un opérateur m -accréatif d'un espace de Banach X , $D(\phi)$ sous-espace de X , $\phi : D(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ s.c.i. sous-linéaire (i.e. $\phi(\lambda x + \mu y) \leq \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$, pour tout $x, y \in D(\phi)$, $\lambda, \mu \geq 0$). On suppose $\phi(J_\lambda^A x) \leq \phi(x)$ pour tout $x \in D(\phi)$. Soient $u_0 \in D(\phi) \cap \overline{D(A)}$ et $f \in L^1(0, T; X_\phi)$ où X_ϕ est l'espace $D(\phi)$ muni de la norme $|x|_\phi = |x| + \phi(x) + \phi(-x)$.

Alors la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$ vérifie

$$u(t) \in D(\phi) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\text{et } \phi(u(t)) \leq \phi(u(s)) + \int_s^t \phi(f(\tau)) d\tau, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T .$$

Démonstration : Il suffit de montrer que $\phi(u(t)) \leq \phi(u_0) + \int_0^t \phi(f(\tau)) d\tau$ pour tout $0 \leq t \leq T$. Supposons d'abord $f \equiv y$. On a alors

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I + \frac{t}{n}(A - y))^{-n} u_0 .$$

Or $(I + \lambda(A - y))^{-1} u_0 = (I + \lambda A)^{-1} (u_0 + \lambda y)$, donc

$\phi((I + \lambda(A - y))^{-1} u_0) \leq \phi(u_0) + \lambda \phi(y)$ et par récurrence

$\phi((I + \frac{t}{n}(A - y))^{-n} u_0) \leq \phi(u_0) + t \phi(y)$, d'où à la limite puisque ϕ est

s.c.i., $\phi(u(t)) \leq \phi(u_0) + t \phi(y) = \phi(u_0) + \int_0^t \phi(f(\tau)) d\tau$.

Procédant par pas, le résultat est vrai pour toute fonction en escalier f à valeurs dans $D(\phi)$. Etant donné $f \in L^1(0, T; X_\phi)$, il existe f_n en escalier à valeurs dans $D\phi$ tels que $f_n \rightarrow f$

dans $L^1(0, T; X_\phi)$. Soit u_n la solution intégrale de

$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n(0) = u_0$. On a $u_n(t) \rightarrow u(t)$ dans X pour

tout $t \in [0, T]$ et $\phi(f_n) \rightarrow \phi(f)$ dans $L^1(0, T)$ donc à la limite

dans $\phi(u_n(t)) \leq \phi(u_0) + \int_0^t \phi(f_n(\tau)) d\tau$, on a

$\phi(u(t)) \leq \phi(u_0) + \int_0^t \phi(f(\tau)) d\tau$.

Notons le résultat général suivant :

Proposition 2.5. Supposons $\int_\Omega dx < +\infty$. Soit A un opérateur maximal monotone de $L^2(\Omega)$; on suppose A accréatif dans $L^1(\Omega)$ et vérifiant la condition $(\tilde{M})$ (resp. $(\tilde{M}_0)$). Soit d'autre part $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement croissante (resp. et $\phi(0) = 0$). On pose

$$A\phi = \{[u, v] \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) ; [\phi(u), v] \in A\}.$$

Alors $A\phi$ est accréatif dans $L^1(\Omega)$, vérifie la condition $(\tilde{M})$ (resp. $(\tilde{M}_0)$) et $\overline{R(I + A\phi)} = L^1(\Omega)$.

Si de plus A est T-accréatif, il en est de même de $A\phi$.

Démonstration : On a d'abord étant donné $[u_i, v_i] \in A\phi$, en posant $w_i = \phi(u_i)$,

$$\begin{aligned} \int (\text{sign}_0(u_1 - u_2))(v_1 - v_2) + \int_{u_1 = u_2} |v_1 - v_2| &= \int (\text{sign}_0(w_1 - w_2))(v_1 - v_2) \\ &+ \int_{w_1 = w_2} |v_1 - v_2| \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $A\phi$ est accréatif; si A était T-accréatif, on aurait de même $A\phi$ est T-accréatif. Soit $p \in \tilde{P}$ (resp. $\tilde{P}_0$); étant donné $[u, v] \in A\phi$, posant $w = \phi(u)$ et $p_1 = p \circ \phi^{-1}$, on a $\int p(u)v = \int p_1(w)v$. Or p_1

est continue croissante bornée définie sur $\phi(\mathbb{R}) =]\alpha, \beta[$ et $p_1(\alpha) + p_1(\beta) = p(+\infty) + p(-\infty) = 0$ (resp. et $p_1(0) = 0$) ; il existe donc $q_n \in \tilde{P}$ (resp. $\tilde{P}_0$) tels que $q_n(r) \rightarrow p_1(r) \quad \forall r \in]\alpha, \beta[$, d'où par convergence dominée $\int q_n(w)v \rightarrow \int p_1(w)v$. D'où $\int p(u)v \geq 0$.

Soit alors $h \in L^\infty(\Omega)$ et montrons qu'il existe $u \in L^1(\Omega)$ tel que $u + (A\phi)u \geq h$. Si u existe, on aura nécessairement $\|u\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. Posons

$$\phi_1(r) = \begin{cases} \phi(\|h\|_\infty) + (r - \|h\|_\infty) & \text{si } r \geq \|h\|_\infty \\ \phi & \text{si } |r| \leq \|h\|_\infty \\ \phi(-\|h\|_\infty) + (r + \|h\|_\infty) & \text{si } |r| \leq -\|h\|_\infty \end{cases}$$

et cherchons $w \in L^2(\Omega)$ tel que $\phi_1^{-1}(w) + Aw \geq h$. On aura alors $u = \phi_1^{-1}(w) \in L^2(\Omega)$ et donc $u + (A\phi_1)u \geq h$, d'où en appliquant les résultats précédents à ϕ_1 , $\|u\|_\infty \leq \|h\|_\infty$ et donc $u + (A\phi)u \geq h$.

Puisque $\phi_1^{-1} = \partial j$ où $j : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ convexe (resp. et $j(0) = 0$) et $\int j(\gamma_\lambda^A h) \leq \int j(h)$ pour tout $h \in L^2(\Omega)$, on a d'après [], $\phi_1^{-1} + A$ maximal monotone dans $L^2(\Omega)$.

D'autre part ϕ_1^{-1} est coercif. Soit en effet s_0 tel que $s\phi_1^{-1}(s) \geq 0$ pour $|s| \geq s_0$ et $\phi_1^{-1}(s) = s - s_0 + \phi_1^{-1}(s_0)$ pour $s \geq s_0$ et $\phi_1^{-1}(s) = s + s_0 + \phi_1^{-1}(-s_0)$ pour $s \leq -s_0$.

On a $\int \phi_1^{-1}(u)u \geq \|u\|_2^2 - C\|u\|_1 - C'$ où C, C' sont des constantes dépendant de $s_0, \phi_1^{-1}(s_0), \phi_1^{-1}(-s_0)$. Donc $\phi_1^{-1} + A$ est aussi coercif et donc surjectif.

Remarque 2.3. Lorsque A est accréatif au sens de Browder, i.e.

$\forall [u_i, v_i] \in A, i=1,2, \forall w \in F(u_1 - u_2), \langle v_1 - v_2, w \rangle \geq 0$, ou dans le cas présent $\forall [u_i, v_i] \in A, i=1,2, \int (\text{sign}_0(u_1 - u_2))(v_1 - v_2) \geq \int_{u_1=u_2} |v_1 - v_2|$,

alors pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante au sens large, $A\phi$ est aussi accréatif au sens de Browder ; par contre il ne semble pas que, A vérifiant une condition (M), il en soit de même de $A\phi$.

Nous avons enfin le résultat :

Proposition 2.6. Soient A un opérateur T-accréatif de $L^1(\Omega)$ vérifiant

la condition (M_0) et la condition de compacité suivante

$$(12) \quad \left[\begin{array}{l} \forall u_n \in L^1(\Omega), \forall t_n \in]0, +\infty[, t_n u_n \text{ borné dans} \\ L^1(\Omega) \implies t_n(I+A)^{-1}u_n \text{ relativement compact dans } L^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Soit β un graphe maximal monotone de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta(0)$. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

a) β est unique et $\int_{\Omega} dx < +\infty$.

b) A est demi-fermé dans $L^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, i.e. $[u_n, v_n] \in A$, u_n et v_n bornés dans $L^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $u_n \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$, $v_n \rightarrow v$ dans $\sigma(L^{\infty}(\Omega), L^1(\Omega)) \implies [u, v] \in A$.

Alors si $R(I+A) = L^1(\Omega)$ et $R(\beta) = \mathbb{R}$, on a $R(\beta+A) = L^1(\Omega)$.

Notons tout de suite les corollaires :

Corollaire 2.4. Soit A un opérateur linéaire de $L^1(\Omega)$ vérifiant la condition (M_0) et tel que $(I+A)^{-1}$ soit un opérateur compact de $L^1(\Omega)$; soit β un graphe maximal monotone surjectif de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta(0)$. Alors $R(\beta+A) = L^1(\Omega)$.

Corollaire 2.5. Soit A un opérateur m -T-accrétif de $L^1(\Omega)$ vérifiant la condition (M_0) et la condition (12); soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement croissante avec $\phi(0) = 0$. On supposera de plus A demi-fermé dans $L^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ ou $\int_{\Omega} dx < +\infty$. Alors $A\phi$ est un opérateur m -T-accrétif de $L^1(\Omega)$ vérifiant la condition (M_0) .

Démonstration de la Proposition 2.6. : Posons $\beta_{\lambda} = (\beta^{-1} + \lambda I)^{-1} + \lambda I$. Pour tout $v \in L^1(\Omega)$, il existe $u_{\lambda} \in L^1(\Omega)$ unique tel que $\beta_{\lambda} u_{\lambda} + Au_{\lambda} \ni v$. De plus $\|\beta_{\lambda} u_{\lambda}\|_{L^p} \leq \|v\|_{L^p}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et si $\hat{u}_{\lambda}$ est la solution correspondant à $\hat{v}$, $\|(\beta_{\lambda} u_{\lambda} - \beta_{\lambda} \hat{u}_{\lambda})^+\|_1 \leq \|(v - \hat{v})^+\|_1$ car $A\beta_{\lambda}^{-1}$ est un opérateur T-accrétif vérifiant la condition (M_0) .

Montrons d'abord que pour M fixé, l'ensemble

$K = \{u_{\lambda} \in L^1(\Omega); \beta_{\lambda} u_{\lambda} + Au_{\lambda} \ni v, v \in L^1(\Omega), \|v\|_1 \leq M, 0 < \lambda < 1\}$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. Il suffit pour cela de montrer que

K est borné dans $L^1(\Omega)$ car $K \subset (I+A)^{-1}(K+2B_M)$ où $B_M = \{v; \|v\|_1 \leq M\}$.
 Supposons qu'il existe $v_n \in B_M$, $\lambda_n \in]0,1[$ tel que u_n solution de
 $\beta_{\lambda_n} u_n + Au_n \ni v_n$, vérifie $\|u_n\|_1 \rightarrow +\infty$. Considérant $w_n = v_n - \beta_{\lambda_n} u_n + u_n$
 et $t_n = \frac{1}{\|u_n\|_1}$, on a $\|t_n w_n\|_1 \rightarrow 1$ et donc d'après (12),
 $t_n u_n = t_n (I+A)^{-1} w_n$ relativement compact dans $L^1(\Omega)$. Or $\beta_{\lambda_n} u_n(x)$
 est borné p.p. $x \in \Omega$, donc d'après la surjectivité de β , $u_n(x)$ est
 borné p.p. $x \in \Omega$ et $t_n u_n(x) \rightarrow 0$ p.p. $x \in \Omega$, d'où la contradiction.

Considérons alors d'abord $v \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. Soit u_λ la solution
 de $\beta_\lambda u_\lambda + Au_\lambda \ni v$. Il existe $\lambda_n \rightarrow 0$ tel que $u_{\lambda_n} \rightarrow u$ dans
 $L^1(\Omega)$ et $u_{\lambda_n}(x) \rightarrow u(x)$ p.p. $x \in \Omega$. D'autre part $\|\beta_{\lambda_n} u_{\lambda_n}\|_{L^\infty} \leq \|v\|_{L^\infty}$
 et donc d'après la surjectivité de β , $\|u_{\lambda_n}\|_{L^\infty}$ est borné.

Sous l'hypothèse a), $\beta_\lambda = \beta(I+\lambda\beta)^{-1} + \lambda I$ et donc $\beta_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(x) \rightarrow \beta u(x)$
 p.p. $x \in \Omega$; on achève par Lebesgue et la fermeture de A pour montrer
 que $\beta u + Au \ni v$.

Sous l'hypothèse b), après extraction d'une sous-suite, $\beta_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}} \rightarrow w$
 dans $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$, on a $w + Au \ni v$ et $w(x) \in \beta u(x)$ p.p. $x \in \Omega$
 car l'opérateur β est demi-fermé dans $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Dans tous les
 cas il existe donc une suite $\lambda_n \rightarrow 0$ telle que $u_{\lambda_n} \rightarrow u$ dans
 $L^1(\Omega)$, $\beta_{\lambda_n} u_{\lambda_n} \rightarrow w$ dans $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ et $w + Au \ni v$, $w \in \beta(u)$ p.p.

Considérons alors $v \in L^1(\Omega)$. Soit $v_m = \begin{cases} v & \text{si } |v| \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Considérons $u_{\lambda,m}$ la solution de $\beta_\lambda u_{\lambda,m} + Au_{\lambda,m} \ni v_m$. Pour $\lambda > 0$
 fixé, $|u_{\lambda,m}|$ est une suite croissante p.p. sur Ω . D'autre part,
 d'après le paragraphe précédent et par le procédé diagonal, il existe
 $\lambda_n \downarrow 0$ tel que pour tout m , $u_{\lambda_n,m} \rightarrow u_m$ dans $L^1(\Omega)$,

$\beta_{\lambda_n} u_{\lambda_n,m} \rightarrow w_m$ dans $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$, $w_m \in \beta(u_m)$ p.p., $w_m + Au_m \ni v_m$.

On aura de plus $|u_m| \uparrow$ et $|w_m| \uparrow$. Enfin $\{u_m\}$ est relativement compact
 dans $L^1(\Omega)$ et $\{w_m\}$ est borné dans $L^1(\Omega)$, donc $u_m \rightarrow u$ dans

$L^1(\Omega)$, $v_n \rightarrow w$ dans $L^1(\Omega)$ et à la limite, $w \in \beta(u)$ p.p. et $w + Au \geq v$.

Remarque 2.4. Nous avons presque achevé la rédaction de ce paragraphe lorsque nous avons eu connaissance du pré-print de [13]. Malgré certains recoupements, nous pensons utile de conserver cet exposé qui apporte un éclairage plus systématique sur la propriété (M) et plusieurs résultats complémentaires.

2. Equations quasi-linéaires du 1er ordre.

Nous nous proposons d'étudier les équations de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_i(u)) = \psi, \quad u(0) = u_0.$$

Démontrons d'abord le lemme suivant qui copie le lemme A de [19].

Lemme 2.2. Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue, $v \in L^1(\Omega)$, $w \in [L^1(\Omega)]^N$ avec $\int w = 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$i) \quad \int_{u > k} \{v + \phi(k)w\} \geq \frac{1}{2} \int v \geq \int_{u < k} \{v + \phi(k)w\} \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

$$ii) \quad \int \text{sign}_0(u-k) \{v + \phi(k)w\} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

$$iii) \quad \exists \alpha \in L^\infty(\mathbb{R} \times \Omega), \alpha(k, x) \in \text{sign}(u(x) - k) \text{ p.p. } (k, x) \text{ et}$$

$$\int \alpha(k, x) \{ \phi(k)w + v \} \geq 0 \text{ p.p. } k$$

$$iv) \quad \text{Pour tout } p \in P, \int \{ p(u)v + w \int_0^u p'(s) \phi(s) ds \} \geq \frac{1}{2} \{ p(+\infty) + p(-\infty) \} \int v.$$

Démonstration : $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$ immédiatement

$$iii) \Rightarrow iv). \text{ Soit } g(k) = \int \alpha(k, x) \{ v + \phi(k)w \}.$$

On a pour $p \in P$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int p'(k) g(k) dk &= - \frac{1}{2} \{ p(+\infty) + p(-\infty) \} \int v + \int p(u)v \\ &\quad + \frac{1}{2} \int w \left\{ \left(\int_{-\infty}^0 + 2 \int_0^u - \int_0^\infty \right) p'(s) \phi(s) ds \right\}; \end{aligned}$$

soit $iv)$ puisque $\int w = 0$.

iv) $\implies$ i). Prenant

$$p_n(s) = \begin{cases} 1 & s \gg 1/n \\ ns & 0 < s < 1/n \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}, \text{ on a } p_n(s) \rightarrow \text{sign}_0^+ s \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},$$

et $\int_0^s p'(r)\phi(r) dr \rightarrow (\text{sign}_0^+ s)\phi(0)$; d'où puisque

$$\int w \left\{ \int_0^u p'(s)\phi(s) ds \right\} = \int w \left\{ \int_k^u p'(s)\phi(s) ds \right\} \text{ pour tout } k \in \mathbb{R}, \text{ à la}$$

limite lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\int \text{sign}_0^+(u-k) \{v + \phi(k)w\} \geq \frac{1}{2} \int v.$$

On obtient de même l'autre inégalité en prenant $q_n(s) = -p_n(-s)$.

Suivant [30] et [19], nous poserons la définition suivante :

Définition 2.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue,

$\psi \in L_{loc}^1(\Omega)$. On appelle solution au sens de Kruskov sur Ω de

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_i(u)) = \psi, \text{ toute fonction } u \in L^\infty(\Omega) \text{ telle que}$$

$$\forall f \in \mathcal{D}^+(\Omega), \forall k \in \mathbb{R}, \int \text{sign}_0(u-k) \{(\phi(u) - \phi(k))f_x + \psi f\} \geq 0.$$

Prenant $k > \|u\|_\infty$ et $k < \|u\|_\infty$, on voit que $\psi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_i(u))$ au

sens des distributions sur Ω . Utilisant le lemme 2.2., on voit que $u \in L^\infty(\Omega)$ est solution au sens de Kruskov sur Ω de $\sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_i(u)) = \psi$ ssi u vérifie l'une des inégalités suivantes :

$$(13) \quad \forall f \in \mathcal{D}^+(\Omega), \forall k \in \mathbb{R}, \int_{u > k} (\phi(u) - \phi(k))f_x + \psi f \geq 0 \geq \int_{u < k} (\phi(u) - \phi(k))f_x + \psi f$$

$$(14) \quad \forall f \in \mathcal{D}^+(\Omega), \forall p \in P, \int \{p(u)(\phi(u)f_x + \psi f) - f_x \int_0^u p'(s)\phi(s) ds\} \geq 0.$$

Démontrons la Proposition suivante qui copie le théorème 1 de [30]:

Proposition 2.7. Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue,

$\psi_j \in L_{loc}^1(\Omega)$, u_j solutions au sens de Kruskov sur Ω de

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_i(u_j) = \psi_j \quad (j=1,2). \text{ Alors}$$

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \forall f \in \mathcal{D}^+(\Omega), \exists \alpha \in L^\infty(\Omega), \alpha(x) \in \text{sign}^+(u_1(x) - u_2(x)) \text{ p.p. } x, \\ \text{et} \quad \int \alpha \{ (\phi(u_1) - \phi(u_2)) f_x + (\psi_1 - \psi_2) f \} \geq 0. \end{array} \right.$$

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{D}^+(\Omega)$. Donnons-nous $\rho \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$ tel que $\text{supp } \rho \subset \{|x| \leq 1\}$, $\int \rho = 1$ et posons $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$. Pour $n > [\text{dist}(\text{supp } f, \partial\Omega)]^{-1}$, posons $g_n(x, y) = f(\frac{x+y}{2}) \rho_n(\frac{x-y}{2})$. On a $g_n \in \mathcal{D}^+(\Omega \times \Omega)$. Prenant $g = g_n$, on a d'après (13),

$$\int dy \int dx \text{sign}_0^+(u_1(x) - u_2(y)) \{ (\phi(u_1(x)) - \phi(u_2(y))) g_x(x, y) + \psi_1(x) g(x, y) \} \geq 0$$

et

$$-\int dx \int dy \text{sign}_0^-(u_2(y) - u_1(x)) \{ (\phi(u_2(y)) - \phi(u_1(x))) g_y(x, y) + \psi_2(y) g(x, y) \} \geq 0$$

d'où en additionnant, puisque $g_x + g_y = f_\xi(\frac{x+y}{2}) \rho_n(\frac{x-y}{2})$, en posant $\xi = \frac{x+y}{2}$, $\eta = \frac{x-y}{2}$,

$$\int \rho_n(\eta) d\eta \int d\xi \text{sign}_0^+(u_1(\xi+\eta) - u_2(\xi-\eta)) \{ (\phi(u_1(\xi+\eta)) - \phi(u_2(\xi-\eta))) f_\xi(\xi) + (\psi_1(\xi+\eta) - \psi_2(\xi-\eta)) f(\xi) \} \geq 0$$

et la Proposition en faisant $n \rightarrow +\infty$.

Introduisons l'opérateur A_ϕ :

Notation 2.1. Etant donné $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continu, nous poserons

$D_\phi = \{u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) ; \text{il existe } \psi \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } u \text{ soit solution au sens de Kruskov sur } \mathbb{R}^N \text{ de } \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_i(u)) = \psi\}$.

On sait alors que nécessairement $\psi = (\phi(u))_x$ au sens des distributions.

On posera $A_\phi = u \in D_\phi \mapsto (\phi(u))_x$.

Nous serons amenés à considérer la condition sur ϕ :

$$(16) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\phi(r)|}{|r|^{\frac{N-1}{N}}} = 0$$

qui est justifiée par le lemme suivant. Remarquons que lorsque $N=1$, la condition (16) se réduit à $\phi(0) = 0$ qui est seulement une normalisation de la fonction ϕ .

Lemme 2.3. Soient ϕ vérifiant (16), $K \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$.

Alors posant $K_n(x) = K(\frac{x}{n})$, on a

$$\|\phi(u)(K_n)_x\|_1 \leq C \|u\|_1^{\frac{N-1}{N}}$$
 où C ne dépend que de ϕ , K , $\|u\|_\infty$ et N ;
et $\|\phi(u)(K_n)_x\|_1 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration : Posons $\gamma(r) = |\phi(r)| |r|^{\frac{1-N}{N}}$. On a par Hölder

$$\begin{aligned} \int |\phi(u)(K_n)_x| &\leq \|u\|_1^{\frac{N-1}{N}} \left(\int \gamma(u)^N |(K_n)_x|^N \right)^{1/N} \\ &= \|u\|_1^{\frac{N-1}{N}} \left(\int \gamma(u(nx))^N |K_x(x)|^N dx \right)^{1/N}. \end{aligned}$$

Posant $\text{supp } K \subset \{|x| \leq R\}$, $M = \sup_{|r| \leq R} \gamma(r)$, $M' = \|K_x\|_\infty$, on a

$$\|\phi(u)(K_n)_x\|_1 \leq MM' b_N^{1/N} \|u\|_1^{\frac{N-1}{N}}$$
 où b_N est la mesure de la boule

unité de $\mathbb{R}^N$. D'autre part si $\|\phi(u)(K_n)_x\|_1 \not\rightarrow 0$, il existerait

$n_k \rightarrow +\infty$ tel que $\inf_k \|\phi(u)(K_{n_k})_x\|_1 > 0$. Or

$$\int |u(nx)| dx = \frac{1}{n} \int |u(x)| dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$
 donc il existe une suite extraite que nous utiliserons toujours (n_k) telle que $u(n_k x) \rightarrow 0$ p.p. et donc $\gamma(u(n_k x)) \rightarrow 0$ p.p. et par convergence

dominée $\int \gamma(u(n_k x))^N |K_x(x)|^N dx$ tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$, ce qui est contradictoire.

Proposition 2.8. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continu vérifiant (16). L'opérateur A_ϕ est T-accrétif dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et vérifie la condition (M). De plus $R(I + \lambda A_\phi) \supset L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\lambda > 0$.

Démonstration : Prenant dans (15), $f = K_n$ où $K \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$, $K(0) = 1$, d'après le lemme 2.3., il existe $\alpha \in \text{sign}^+(u_1 - u_2)$ tel que

$$\int \alpha(A_\phi u_1 - A_\phi u_2) \geq 0,$$
 ce qui démontre la T-accrétivité. Pour la condition (M), il suffit d'appliquer le lemme 2.3. à l'inégalité (14) en remarquant que $r \mapsto \int_0^r p'(s)\phi(s)ds$ et $r \mapsto p(r)\phi(r)$ vérifient la condition (16).

Pour achever la démonstration, nous utiliserons le résultat de Crandall [19], montrant que $R(I+\lambda A_\phi) \supset L^1 \cap L^\infty$ lorsque $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{|\phi(r)|}{|r|} < +\infty$ et le lemme suivant qui copie d'ailleurs Crandall.

Lemme 2.4. Soient ϕ^v et ϕ vérifiant (16) tels que $\phi^v \rightarrow \phi$ uniformément sur tout compact. Si $h \in \bigcap_v R(I+\lambda A_{\phi^v}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $h \in R(I+\lambda A_\phi)$ et $(I+\lambda A_{\phi^v})^{-1}h \rightarrow (I+\lambda A_\phi)^{-1}h$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration : Il est immédiat que A_{ϕ^v} commute avec les translations et donc aussi $J_\lambda^v = (I+\lambda A_{\phi^v})^{-1}$. Puisque A_{ϕ^v} est accréatif de type (M), on a $\int |(J_\lambda^v h)(x+y) - (J_\lambda^v h)(x)| dx \leq \int |h(x+y) - h(x)| dx$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et $\|J_\lambda^v h\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. Donc $\{J_\lambda^v h\}$ est relativement compact dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Soit u un point d'accumulation ; on a en passant à la limite dans $\int \text{sign}_0(u^v(x)-k) \{(\phi(u^v)-\phi(k))f_x + \frac{h-u^v}{\lambda}f\} \geq 0$, pour tout $f \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$ et tout $k \in \mathbb{R}$, l'existence de $\alpha \in \text{sign}(u-k)$ tel que

$$\int \alpha \{(\phi(u)-\phi(k))f_x + \frac{h-u}{\lambda}f\} \geq 0.$$

Faisant $k < -\|u\|_\infty$ et $k > \|u\|_\infty$, on a $\frac{h-u}{\lambda} = (\phi(u))_x$; enfin puisque $\|J_\lambda^v h\|_1 \leq \|h\|_1$ on a $u \in L^1$ et donc $u \in D_\phi$ et $u = J_\lambda^\phi h$.

Notons un corollaire du lemme 2.4. :

Corollaire 2.6. Soient ϕ vérifiant (16) et $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors lorsque $\lambda \rightarrow 0$, $(I+\lambda A_\phi)^{-1}h \rightarrow h$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ ($1 < p < +\infty$).

En effet $A_{\lambda\phi} = \lambda A_\phi$, donc par application du lemme 2.4. $(I+\lambda A_\phi)^{-1}h \rightarrow h$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Mais $\|(I+\lambda A_\phi)^{-1}h\|_p \leq \|h\|_p$, d'où la convergence dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $1 < p < +\infty$.

Nous avons démontré la convergence dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans deux cas, déjà très généraux.

Proposition 2.9. Soient $\phi^v \rightarrow \phi$ uniformément sur tout compact ; on suppose qu'il existe $\alpha > \frac{N}{N+1}$ tel que $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{|\phi^v(r)|}{|r|^\alpha} < +\infty$. Alors

$$(I + \lambda A_{\phi^v})^{-1} h \rightarrow (I + \lambda A_{\phi})^{-1} h \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N) \quad \forall \lambda > 0, \forall h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration : On peut toujours supposer $\lambda = 1$ et $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Posons $u_v = (I + A_{\phi^v})^{-1} h$; d'après le lemme 2.4. il suffit de démontrer que

$$\int_{|x| \geq R} |u_v| \rightarrow 0 \quad \text{uniformément par rapport à } v \quad \text{lorsque } R \rightarrow +\infty.$$

Soient $K \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$ avec $K(0) = 1$, $\rho \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R})$ avec $\int \rho = 1$. Posons

$$K_n(x) = K\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{et} \quad \chi_m(x) = \int_{m(r-|x|)}^{+\infty} \rho(s) ds. \quad \text{Prenant } f = K_n \chi_m \quad \text{on a}$$

$$0 \leq \int \text{sign}_0 u_v \{ (\phi^v(u_v)) f_x + (h - u_v) f \} \leq \int |\phi^v(u_v)| |(K_n)_x| + \{ |\phi^v(u_v)| |(\chi_m)_x| + |h| \chi_m - |u_v| \chi_m \} K_n.$$

D'où d'après le lemme 2.3. en faisant $n \rightarrow +\infty$,

$$\int |u_v| \chi_m \leq \int |h| \chi_m + \int |\phi^v(u_v)| \rho_m(r-|x|) \quad \text{avec } \rho_m(s) = m \rho(ms).$$

Choisisant r suffisamment grand et faisant $m \rightarrow +\infty$, on a

$$\int_{|x| \geq r} |u_v| \leq \int \sum_r |\phi^v(u_v)| d\sigma_r \quad \text{p.p. } r \quad \text{où } \sum_r = \{|x|=r\} \quad \text{et } d\sigma_r \text{ est}$$

la mesure superficielle sur la sphère $\sum_r$.

D'après l'hypothèse puisque $\|u_v\|_\infty \leq \|h\|_\infty$, il existe $C > 0$ tel que

$|\phi^v(u_v)| \leq C |u_v|^\alpha$, on peut toujours prendre $\alpha < 1$. Appliquant Hölder à l'inégalité précédente, on a

$$\int_{|x| \geq r} |u_v| \leq C \left(\int \sum_r |u_v| d\sigma_r \right)^\alpha r^{N(1-\alpha)} \sigma_N^{1-\alpha} \quad \text{où } \sigma_N \text{ est la mesure de } \sum_1.$$

Soit en posant $v_v(r) = \int_{|x| \geq r} |u_v|$, on a

$$v_v(r)^{1/\alpha} \leq -C_1 r^{\frac{N(1-\alpha)}{\alpha}} \frac{dv_v}{dr}(r) \quad \text{où } C_1 = C^{1/\alpha} \sigma_N^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Prenant r_0 suffisamment grand, soit v la solution sur $[r_0, +\infty[$ de

$$v(r)^{1/\alpha} = -C_1 r^{\frac{N(1-\alpha)}{\alpha}} \frac{dv}{dr}(r), \quad v(r_0) = \|h\|_1, \quad \text{on a } v_v(r) \leq v(r) \quad \forall r \geq r_0.$$

Or puisque $\frac{N(1-\alpha)}{\alpha} < 1$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) = 0$, d'où la Proposition.

Corollaire 2.7. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue telle qu'il existe $\alpha > \frac{N}{N+1}$ vérifiant $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{|\phi(r)|}{|r|^\alpha} < +\infty$. Alors $\overline{D}_\phi = L^1(\mathbb{R}^N)$.

La condition $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{|\phi(r)|}{|r|^\alpha} < +\infty$ pour $\alpha > \frac{N}{N+1}$ est plus forte que la condition (16) ; elle ne semble pas la meilleure d'autant plus que l'on a pour $N=1$:

Proposition 2.10. Soient $\phi^v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\phi^v \rightarrow \phi$ uniformément sur tout compact. Alors $(I + \lambda A_{\phi^v})^{-1} h \rightarrow (I + \lambda A_\phi)^{-1} h$ dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration : Reprenant la démonstration de la Proposition 2.9 avec

$$\chi_m(x) = \int_{m(r-x)}^{\infty} \rho(s) ds, \text{ on obtient :}$$

$$\int_r^{+\infty} |u_v| \leq |\phi^v(u_v(r))| \text{ p.p. } r \text{ suffisamment grand.}$$

Or, d'après l'hypothèse, il existe $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continue strictement croissante avec $\gamma(0) = 0$ tel que $|\phi^v(r)| \leq \gamma(|r|)$ pour tout v et tout r . Donc posant $v_v(r) = \int_r^{+\infty} |u_v|$, on a

$$\frac{dv_v}{dr} + \gamma^{-1}(v_v) \leq 0.$$

On achève comme à la Proposition 2.9. puisque les solutions de $\frac{dv}{dr} + \gamma^{-1}(v) = 0$ tendent vers 0 à l'infini.

On démontre de même que $\int_{-\infty}^x |u_v| \rightarrow 0$ uniformément par rapport à v lorsque $r \rightarrow -\infty$.

Corollaire 2.8. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $\overline{D}_\phi = L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 2.5. Crandall dans [20] démontre ce résultat pour ϕ strictement monotone en montrant que $\{u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}); \phi(u) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$; ce résultat tombe en défaut lorsque ϕ n'est plus monotone. Lorsque ϕ est monotone (strictement n'est pas nécessaire), alors

$D_\phi = \{u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) ; \phi(u) \text{ absolument continu sur } \mathbb{R}\}$.
 En effet si $\phi(u)$ est absolument continu, pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int \text{sign}_0(u-k) \{(\phi(u)-\phi(k))f_x + (\phi(u))_x f\} = \int \text{sign}_0(u-k) [(\phi(u)-\phi(k))f]_x,$$

or $\text{sign}_0(u-k) \in \text{sign}(\phi(u)-\phi(k))f$; mais l'opérateur linéaire L de domaine $D(L) = \{v \in L^1(\mathbb{R}); \frac{dv}{dx} \in L^1(\mathbb{R})\}$ et défini par $Lv = \frac{dv}{dx}$ est le générateur infinitésimal du groupe d'isométrie de $L^1(\mathbb{R})$,
 $(S(t)v)(x) = v(t+x)$; donc pour tout $v \in D(L)$ et tout $\alpha \in \text{sign } v$,
 $\int \alpha Lv = 0$.

Enfin si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue est surjective, l'opérateur A_ϕ est fermé dans $L^1(\mathbb{R})$. Lorsque ϕ est monotone la condition de surjectivité est même nécessaire pour que A_ϕ soit fermé.

Appliquant aux opérateurs A_ϕ les résultats du chapitre I rappelés dans le §.1 de ce chapitre, nous obtenons des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions intégrales de $\frac{du}{dt} + A_\phi u = \psi$, $u(0) = u_0$. Nous nous proposons d'abord de faire le lien avec les solutions considérées par Kruskov.

Définition 2.3. Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\psi \in L^1_{loc}([0, T[\times \mathbb{R}^N)$, $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

On appelle solution au sens de Kruskov de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$ toute fonction $u \in L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$ telle que :

- 1) u est solution au sens de Kruskov sur $]0, T[\times \mathbb{R}^N$ de $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_i(u)) = \psi$.
- 2) $u(t) \rightarrow u_0$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $t \rightarrow 0$ essentiellement.

Cette définition est exactement celle donnée par Kruskov dans [30].

Proposition 2.11. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue vérifiant (16). Pour tout

$\psi \in L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \overline{D_\phi}$, il existe $u \in L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$ unique tel que u soit solution au sens de Kruskov de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$.

De plus $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N))$

$$\begin{aligned} \|u(t)^+\|_p &\leq \|u_0^+\|_p + \int_0^t \|\psi(\tau)^+\|_p \, d\tau \\ \|u(t)^-\|_p &\leq \|u_0^-\|_p + \int_0^t \|\psi(\tau)^-\|_p \, d\tau \\ \int_{\mathbb{R}^N} u(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} u_0 + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\tau) \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty, \quad \forall t \in [0, T]$$

et si $\hat{u}$ est la solution correspondant à $\hat{\psi}$ et $\hat{u}_0$, on a

$$\int (u(t) - \hat{u}(t))^+ \leq \int (u_0 - \hat{u}_0)^+ + \int_0^t d\tau \int (\psi - \hat{\psi})^+ \quad \forall t \in [0, T].$$

Démonstration : Montrons d'abord que la bonne solution u de

$\frac{du}{dt} + A_\phi u \ni \psi$, $u(0) = u_0$ est solution au sens de Kruskov de

$\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$. Il suffit suivant les méthodes habituelles de le démontrer pour ψ indépendant de t . Alors $u(t)$ est limite uniforme de $u_\varepsilon(t)$ solution de

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad \frac{u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + A_\phi u_\varepsilon(t) \ni \psi.$$

Soit $f \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$. Considérons l'opérateur $\{[uf, \phi(u)f_x + (A_\phi u)f] ; u \in D_\phi\} = A$; il est accrétif d'après (15) et l'on a en posant $v_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t)f$,

$$v_\varepsilon(0) = u_0 f, \quad \frac{v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + A v_\varepsilon(t) \ni \psi f + \phi(u_\varepsilon(t))f_x.$$

Puisque $v_\varepsilon(t) \rightarrow u(t)f$ uniformément en t et $\phi(u_\varepsilon(t))f_x \rightarrow \phi(u(t))f_x$ uniformément en t , car

$\|u_\varepsilon(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|\psi\|_\infty T$, d'après le théorème 1.1., $u(t)f$ est bonne solution de $\frac{dv}{dt} + Av \ni \psi + \phi(u)f_x$. En particulier puisque

$[kf, \phi(k)f_x] \in \hat{A}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|(u(t) - k)f\|_1 \leq \|(u(s) - k)f\| + \int_s^t d\tau \sup_{\alpha \in \text{sign}(u(\tau) - k)f} \int \alpha \{(\phi(u(\tau)) - \phi(k))f_x + \psi f\}.$$

D'où l'on tire d'après la Proposition 0.12 que pour tout $\gamma \in \mathcal{D}^+([0, T[)$,

il existe $\alpha \in \text{sign}(u(\tau) - k)$ tel que $\int \alpha \{(u(t) - k)f\gamma_t + (\phi(u(t)) - \phi(k))f_x \gamma + \psi f \gamma\} \geq 0$.

On a donc démontré l'existence d'une solution au sens de Kruskov vérifiant toutes les propriétés de la Proposition 2.10. Reste à montrer l'unicité. Soient u et $\hat{u}$ deux solutions ; d'après la Proposition 2.6., pour tout $f \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$ et $\gamma \in \mathcal{D}^+([0, T[)$, il existe $\alpha \in \text{sign}(u - \hat{u})$ tel que $\int \alpha \{ (u - \hat{u}) f_{\gamma_t} + (\phi(u) - \phi(\hat{u})) f_x \gamma \} \geq 0$. Ou encore, on a p.p. $s \leq t$, $s, t \in]0, T[$,

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))f\|_1 \leq \|(u(s) - \hat{u}(s))f\|_1 + \int_s^t \int |\phi(u) - \phi(\hat{u})| f_x \gamma.$$

Faisant $s \rightarrow 0$ essentiellement, on a donc

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))f\|_1 \leq \int_0^t \|(\phi(u(\tau)) - \phi(\hat{u}(\tau)))f_x\|_1 d\tau \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

Prenant $f = K_n$ où $K \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$, $K(0) = 1$, on a d'après le Lemme 2.3.

$$\|\phi(u(\tau))f_x\|_1 \leq C \|u(\tau)\|_1^{\frac{N-1}{N}} \quad \text{où } C \text{ ne dépend que de } \phi, K, N \text{ et}$$

$\|u(\tau)\|_\infty$, et donc indépendant de τ , car $\|u(\tau)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$; de plus

$\|\phi(u(\tau))f_x\|_1 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$; d'où par convergence dominée

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq 0 \quad \text{p.p. } t \in]0, T[\text{ et donc } u = \hat{u}.$$

Remarque 2.6. La Proposition précédente montre en particulier que lorsque $\overline{D}_\phi = L^1(\mathbb{R}^N)$, on a un problème bien posé en terme de solution au sens de Kruskov dans la classe $L^1 \cap L^\infty$. La propriété $\overline{D}_\phi = L^1(\mathbb{R}^N)$ n'étant pas, pour l'instant, réalisée pour tout les ϕ vérifiant (16), il n'est pas inintéressant de noter que la réciproque est vraie :

soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ vérifiant (16). Il y a équivalence entre

i) $\overline{D}_\phi = L^1(\mathbb{R}^N)$

ii) Pour tout $T > 0$, tout $\psi \in L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$ et tout $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une solution au sens de Kruskov unique de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$, dans $L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$.

iii) Pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, il existe $T > 0$ et une solution au sens de Kruskov de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = h$, $u(0) = u_0$ dans $L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$.

L'implication $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$ étant connue, donnons une idée de la démonstration de $iii) \Rightarrow i)$. On commence par montrer que pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, il existe $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$ unique tel que pour tout $T > 0$, u soit solution au sens de Kruskov de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = h$, $u(0) = u_0$ dans $L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$. On obtient alors pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ un semi-groupe $S_h(t)$ de contractions sur $L^1(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie

$$\frac{1}{2} \|S_h(t)u_0 - S_{\hat{h}}(t)\hat{u}_0\|_1^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0 - \hat{u}_0\|_1^2 + \int_0^t \langle h - \hat{h}, S_h(\tau)u_0 - S_{\hat{h}}(\tau)\hat{u}_0 \rangle_s d\tau.$$

Utilisant la Proposition 1.16., il existe donc A, m -accrétif dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, tel que $S_h(t) = S^{A-h}(t)$ et $\overline{D(A)} = L^1(\mathbb{R}^N)$. On a $A \supset A_\phi$ et donc $\overline{A_\phi} = A$, d'où $\overline{D_\phi} \supset \overline{D(A)} = L^1(\mathbb{R}^N)$.

Il est plus délicat d'étudier le problème $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$ dans la classe de fonctions L^∞ . Nous obtenons des résultats dans deux cas :

Proposition 2.12. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ localement lipschitzienne. Pour tout $\psi \in L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, il existe une solution au sens de Kruskov unique de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$.

De plus $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$

$$\begin{aligned} \|u(t)^+\|_p &\leq \|u_0^+\|_p + \int_0^t \|\psi(\tau)^+\|_p d\tau \quad \text{et} \\ \|u(t)^-\|_p &\leq \|u_0^-\|_p + \int_0^t \|\psi(\tau)^-\|_p d\tau, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty. \end{aligned}$$

Si $\hat{u}$ est la solution correspondant à $\hat{\psi}$ et $\hat{u}_0$, on a

$$(17) \int_{|x-x_0| \leq R-Ct} (u(t) - \hat{u}(t))^+ \leq \int_{|x-x_0| \leq R} (u_0 - \hat{u}_0)^+ + \int_{0 \leq \tau \leq t} (\psi - \hat{\psi})^+ \\ |x-x_0| + C\tau \leq R \\ \forall t \in [0, T], \quad R > 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^N,$$

où C est la constante de Lipschitz de ϕ sur

$$\{|r| \leq \max\{\|u_0\|_\infty + \|\psi\|_\infty T; \|\hat{u}_0\|_\infty + \|\hat{\psi}\|_\infty T\}\}.$$

Démontrons d'abord la relation (17) en copiant le Théorème 1 de [30].

Lemme 2.5. Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\psi_j \in L^1_{loc}([0, T[\times \mathbb{R}^N)$, $u_j \in L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$ solution au sens de Kruskov sur $]0, T[\times \mathbb{R}^N$ de

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_i(u_j)) = \psi_j. \text{ On suppose } \phi \text{ lipschitzienne sur } \{|x| \leq \max(\|u_i\|_\infty)\} \text{ de rapport } C.$$

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$, p.p. $s \leq t$, $s, t \in]0, T[$, tout $R > 0$,

$$\int_{|x-x_0| \leq R-Ct} (u_1(t) - u_2(t))^+ \leq \int_{|x-x_0| \leq R-Cs} (u_1(s) - u_2(s))^+ + \int_{\substack{|x-x_0| + C\tau \leq R \\ s \leq \tau \leq t}} (\psi_1 - \psi_2)^+.$$

Démonstration : On peut toujours supposer $x_0 = 0$.

Soient $\gamma \in \mathcal{D}^+([0, T[)$, $\rho \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R})$ avec $\int \rho = 1$. Posons

$\chi_m(t, x) = \int_{m(|x|+Ct-R)}^\infty \rho(s) ds$ et $f = \gamma \chi_m$. Pour m suffisamment grand $f \in \mathcal{D}^+([0, T[\times \mathbb{R}^N)$. On a donc d'après la Proposition 2.6., l'existence de $\alpha \in \text{sign}^+(u_1 - u_2)$ tel que

$$0 \leq \int \alpha \{ (u_1 - u_2) (\gamma_t \chi_m + \gamma (\chi_m)_t) + (\phi(u_1) - \phi(u_2)) \gamma (\chi_m)_x + (\psi_1 - \psi_2) f \} \\ \leq \int (u_1 - u_2)^+ \chi_m \gamma_t + (\psi_1 - \psi_2)^+ \chi_m \gamma$$

$$\text{car } \alpha \{ (u_1 - u_2) \gamma (\chi_m)_t + (\phi(u_1) - \phi(u_2)) \gamma (\chi_m)_x \}$$

$$= -m \rho(m(|x|+Ct)) \gamma (u_1 - u_2)^+ \left\{ C + \frac{\phi(u_1) - \phi(u_2)}{u_1 - u_2} |x|_x \right\} \leq 0.$$

Lorsque $m \rightarrow +\infty$, $\chi_m(t, x) \rightarrow$ la fonction caractéristique de $\{|x| + Ct \leq R\}$, d'où le lemme à l'aide de la Proposition 0.12.

Démonstration de la Proposition 2.12. : L'unicité résulte du lemme.

On peut toujours supposer $\phi(0) = 0$, et donc ϕ vérifie (16) et $\overline{D_\phi} = L^1(\mathbb{R}^N)$.

Considérons $u_{n,0} = \begin{cases} u_0 & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$; $\psi_n = \begin{cases} \psi & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

D'après la Proposition 2.11., il existe u_n solution au sens de Kruskov de $\frac{du_n}{dt} + (\phi(u_n))_x = \psi_n$, $u_n(0) = u_{n,0}$. De plus

$$u_n \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N)) \text{ , } \|u_n^+(t)\|_p \leq \|u_{n,0}^+\|_p + \int_0^t \|\psi_n(\tau)^+\|_p d\tau \text{ et}$$

$$\|u_n^-(t)\|_p \leq \|u_{n,0}^-\|_p + \int_0^t \|\psi_n(\tau)^-\|_p d\tau \text{ . On a donc en particulier}$$

$\|u_n\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|\psi\|_\infty T$. Donc par application du lemme 2.5. u_n converge dans $\mathcal{C}([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$. D'où la Proposition par passage à la limite.

Posons $L^1_{loc}(-\infty)(\mathbb{R}) = \{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) ; \int_0^{+\infty} |u| < +\infty\}$ muni des semi-normes $p_r(u) = \int_{-r}^{+\infty} |u|$. ($r \geq 0$).

Proposition 2.13. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ avec

$$\phi(t) - \phi(s) \leq \int_s^t \omega(\tau) d\tau \quad \forall s \leq t \text{ .}$$

Pour tout $\psi \in L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}) \cap L^1(0, T; L^1_{loc}(-\infty)(\mathbb{R}))$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1_{loc}(-\infty)(\mathbb{R})$ il existe une solution au sens de Kruskov unique de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$ dans $L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}) \cap L^1(0, T; L^1_{loc}(-\infty)(\mathbb{R}))$.

De plus $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1_{loc}(-\infty)(\mathbb{R}))$

$$\|u(t)^+\|_p \leq \|u_0^+\|_p + \int_0^t \|\psi(\tau)^+\|_p d\tau \text{ , } \|u(t)^-\|_p \leq \|u_0^-\|_p + \int_0^t \|\psi(\tau)^-\|_p d\tau$$

$$\forall t \in [0, T] \text{ , } \forall 1 \leq p \leq +\infty \text{ .}$$

Si $\hat{u}$ est la solution correspondant à $\hat{\psi}$ et $\hat{u}_0$, on a

$$\int_{R+Ct}^{+\infty} (u(t) - \hat{u}(t))^+ dx \leq \int_R^{+\infty} (u_0 - \hat{u}_0)^+ dx + \iint_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ x - Ct \geq R}} (\psi - \hat{\psi})^+ dx d\tau \quad \forall R \in \mathbb{R} \text{ ,}$$

$$\forall t \in [0, T]$$

où $C = \|\omega\|_{L^\infty} (|r| \leq \max(\|u_0\|_\infty + \|\psi\|_\infty T; \|\hat{u}_0\|_\infty + \|\hat{\psi}\|_\infty T))$.

Comme pour la Proposition 2.12., il suffit de démontrer le lemme :

Lemme 2.6. Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_j \in L^1(]0, T[; L^1_{loc}(-\infty)(\mathbb{R}))$,

$u_{j,0} \in L^1_{loc}(-\infty)(\mathbb{R})$, $u_j \in L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}) \cap L^1(]0, T[; L^1_{loc}(-\infty)(\mathbb{R}))$

solution au sens de Kruskov de $\frac{du_j}{dt} + (\phi(u_j))_x = \psi_j$, $u_j(0) = u_{j,0}$.

On suppose $\phi(t) - \phi(s) \leq C(t-s)$, $\forall s \leq t$, $|s|, |t| \leq \max(\|u_j\|_\infty)$.

Alors pour tout $R \in \mathbb{R}$, p.p. $t \in]0, T[$,

$$\int_{R+Ct}^{+\infty} (u_1(t) - u_2(t))^+ dx \leq \int_R^{+\infty} (u_{1,0} - u_{2,0})^+ dx + \iint_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ x - C\tau \geq R}} (\psi_1 - \psi_2)^+ dx d\tau.$$

Démonstration : On peut toujours supposer $R=0$. Soient $\gamma \in \mathcal{D}^+(]0, T[)$, $\rho \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R})$ avec $\int \rho = 1$, $K \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R})$ avec $K(0) = 1$. On pose

$$\chi_m(t, x) = \int_{m|Ct-x|}^{+\infty} \rho(s) ds, \quad K_n(x) = K\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{et} \quad f = \gamma K_n \chi_m.$$

On a $f \in \mathcal{D}^+(]0, T[\times \mathbb{R})$ et donc d'après la Proposition 2.7., l'existence de $\alpha \in \text{sign}^+(u_1 - u_2)$ tel que

$$0 \leq \iint \alpha \{ (u_1 - u_2) (\gamma_t \chi_m + \gamma (\chi_m)_t) K_n + (\phi(u_1) - \phi(u_2)) |(\chi_m)_x K_n + \chi_m (K_n)_x| \gamma + (\psi_1 - \psi_2) f \}$$

$$\leq \iint (u_1 - u_2)^+ \chi_m K_n \gamma_t + |\phi(u_1) - \phi(u_2)| \chi_m \gamma |(K_n)_x| + (\psi_1 - \psi_2)^+ \chi_m \gamma K_n,$$

$$\text{car } \alpha \{ (u_1 - u_2) \gamma K_n (\chi_m)_t + (\phi(u_1) - \phi(u_2)) K_n \gamma (\chi_m)_x \}$$

$$= -m\rho(m(Ct-x)) \chi_m \gamma (u_1 - u_2)^+ \left\{ C - \frac{\phi(u_1) - \phi(u_2)}{u_1 - u_2} \right\} \leq 0.$$

D'où p.p. $s \leq t$, $s, t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} \int (u_1(t) - u_2(t))^+ \chi_m(t) K_n dx &\leq \int (u_1(s) - u_2(s))^+ \chi_m(s) K_n dx \\ &\quad + \int_s^t d\tau \int \{ |\phi(u_1) - \phi(u_2)| \chi_m |(K_n)_x| + (\psi_1 - \psi_2)^+ \chi_m K_n \} dx \end{aligned}$$

Faisant $s \rightarrow 0$ essentiellement puis $n \rightarrow +\infty$ en utilisant le lemme 2.3., on obtient :

$$\int (u_1(t) - u_2(t))^+ \chi_m(t) dx \leq \int (u_{1,0} - u_{2,0})^+ \chi_m(0) dx + \int_s^t d\tau \int (\psi_1 - \psi_2)^+ \chi_m dx$$

p.p. $t \in]0, T[$.

Enfin faisant $m \rightarrow +\infty$, on obtient le lemme.

Remarque 2.7. La condition unilatérale sur ϕ de la Proposition 2.13. est équivalente à ϕ est somme d'une fonction localement lipschitzienne et d'une fonction décroissante. On obtient des résultats analogues avec une fonction croissante en opérant dans $L^1_{loc(+\infty)}(\mathbb{R})$. Utilisant une remarque de P. Lax, Crandall dans [20] étudie les équations de cette forme en effectuant le changement de fonction $v(t, x) = u(t, x - Ct)$, se ramenant ainsi au cas d'une fonction ϕ monotone.

Rappelons qu'une solution au sens de Kruskov est en particulier solution au sens des distributions. Nous nous proposons de donner quelques propriétés de dérivabilité des solutions.

Nous noterons $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^N)$ l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{R}^N$ et nous considérons $L^1(\mathbb{R}^N)$ comme sous-espace de $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^N)$. Nous noterons $\|\mu\|_1$ la norme de $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 2.14. Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ vérifiant (16),

$\psi \in L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$ tel que $t=0$ soit point de Lebesgue à droite de ψ considéré comme appartenant à $L^1([0, T[; L^1(\mathbb{R}^N))$, $u_0 \in \overline{D_\phi} \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, u la solution au sens de Kruskov de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$. Les propriétés suivantes sont

équivalentes :

- i) $u_0 \in D(\hat{A}_\phi)$.
- ii) $(A_\phi)_\lambda u_0$ converge vaguement lorsque $\lambda \rightarrow 0$.
- iii) $\frac{u(t) - u_0}{t}$ converge vaguement lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

Alors $(\phi(u_0))_x \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^N)$, $(A_\phi)_\lambda u_0 \rightarrow (\phi(u_0))_x$ et

$$\frac{u(t) - u_0}{t} \rightarrow \psi(0) - (\phi(u_0))_x.$$

Démonstration : D'après la Proposition 0.4. et le Théorème 1.2., il

suffit de démontrer que si $\|(A_\phi)_\lambda u_0\|_1$ et $\|\frac{u(t)-u_0}{t}\|_1$ sont bornés, alors $(\phi(u_0))_x \in \mathcal{D}_b^1(\mathbb{R}^N)$ et $(A_\phi)_\lambda u_0 \rightarrow (\phi(u_0))_x$ vaguement et $\frac{u(t)-u_0}{t} \rightarrow \psi(0) - (\phi(u_0))_x$ vaguement.

Supposons $\|(A_\phi)_\lambda u_0\|_1$ borné. Soit $\mu \in \mathcal{D}_b^1(\mathbb{R}^N)$ point d'accumulation vague de $(A_\phi)_\lambda u_0$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Puisque $\|\mathcal{I}_\lambda^\phi u_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ prenant dans (12), $k < \|u_0\|_\infty$ puis $k > \|u_0\|_\infty$, on obtient à la limite,

$$\int \phi(u_0) f_x \, dx = \int f \, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N), \text{ donc } \mu = (\phi(u_0))_x.$$

On en déduit que $(\phi(u_0))_x \in \mathcal{D}_b^1(\mathbb{R}^N)$ et $(A_\phi)_\lambda u_0 \rightarrow (\phi(u_0))_x$ vaguement.

Supposons maintenant $\|\frac{u(t)-u_0}{t}\|_1$ borné et soit $\mu \in \mathcal{D}_b^1(\mathbb{R}^N)$ point d'accumulation vague de $|\frac{u(t)-u_0}{t}|$ lorsque $t \rightarrow 0$. Puisque $\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|\psi\|_\infty T$, on a pour tout $\gamma \in \mathcal{D}^+([0, T[)$ et tout $f \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$,

$$\iint \{u(t)\gamma_t f + \phi(u(t))\gamma f_x + \psi\gamma f\} \, dx \, dt = 0,$$

d'où

$$\int \left(\frac{u(t)-u_0}{t}\right) f + \frac{1}{t} \left(\int_0^t \phi(u(\tau)) \, d\tau\right) f_x + \frac{1}{t} \left(\int_0^t \psi(\tau) \, d\tau\right) f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

et à la limite,

$$\int f \, d\mu + \int \{\phi(u_0) f_x + \psi(0) f\} \, dx = 0$$

et donc $\mu = \psi(0) - (\phi(u_0))_x$.

Corollaire 2.9. Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue vérifiant (16),

$\psi \in L^1([0, T[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$, $u_0 \in \overline{D}_\phi \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, u la solution au sens de Kruskov de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$. Si u est absolument continue de $[0, T]$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors u est solution au sens vague de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, i.e., u considérée comme fonction de $[0, T]$ dans $\mathcal{D}_b^1(\mathbb{R}^N)$ est p.p. vaguement dérivable, et

$$\frac{dt}{dt}u(t) + (\phi(u(t)))_x = \psi(t) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

Corollaire 2.10. Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue vérifiant (16), $\psi \in VB([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, $u_0 \in D(\hat{A}_\phi) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$; la solution au sens de Kruskov de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, $u(0) = u_0$ est solution au sens vague de $\frac{du}{dt} + (\phi(u))_x = \psi$, i.e., u considérée comme fonction de $[0, T]$ dans $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^N)$ est vaguement dérivable à droite en tout point $t \in [0, T[$ et $\frac{d^+u}{dt}(t) + (\phi(u(t)))_x = \psi(t+0)$.

Corollaire 2.11. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue vérifiant (16). Notant $S^\phi(t)$ le semi-groupe pseudo-engendré par A_ϕ et A_ϕ^v le générateur infinitésimal vague de $S^\phi(t)$ considéré comme semi-groupe de $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$D(A_\phi^v) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) = D(\hat{A}_\phi) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad A_\phi^v u = (\phi(u))_x \quad \text{pour tout } u \in D(A_\phi^v) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) .$$

Remarque 2.8. On voit que A_ϕ^v restreint à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est la limite de $(A_\phi)_\lambda$ restreint à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Nous avons rencontré la même propriété pour le générateur faible (resp. fort) d'un semi-groupe d'un espace réflexif strictement convexe (resp. uniformément convexe). Il semble qu'il y ait là une propriété très générale.

Il n'y a pas unicité en général du problème $\frac{du}{dt}(t) + \phi(u(t))_x = \psi(t)$ si l'on n'impose pas d'autres conditions sur la solution (cf. par ex. [33]).

Proposition 2.15. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement monotone avec $\phi(0) = 0$. Alors $D(\hat{A}_\phi) \cap L^\infty(\mathbb{R}) = \{u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) ; \phi(u) \text{ à variation bornée sur } \mathbb{R}\}$ et l'opérateur $u \in D(\hat{A}_\phi) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \phi(u)_x$ est accréatif dans $\mathcal{D}^1(\mathbb{R})$.

Démonstration : On peut toujours supposer ϕ croissante.

Nous savons déjà que $L^\infty(\mathbb{R}) \cap D(\hat{A}_\phi) \subset \{u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) ; \phi(u)_x \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})\}$. Il suffit donc de démontrer que l'opérateur $B = \{[u_1, \phi(u)_x] ; u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \phi(u)_x \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})\}$ est accréatif dans

$\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. Remarquons d'abord que $B_0 = \{[u, \phi(u)_x]; u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \phi(u) \in L^1(\mathbb{R}), \phi(u)_x \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans B pour la norme $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. En effet soit $[u, \phi(u)_x] \in B$; on a $\phi(u(x)) \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$; donnons-nous $a_n \rightarrow -\infty$ et $b_n \rightarrow +\infty$ point de continuité de $\phi(u)$ et soit χ_n la fonction caractéristique de $]a_n, b_n[$; on a $\phi(u)\chi_n = \phi(u\chi_n)$, $u\chi_n \rightarrow u$ dans $L^1(\mathbb{R})$, $\phi(u\chi_n)_x \rightarrow \phi(u)_x$ dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. L'opérateur $\Lambda = \{[v, v_x]; v \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}), v_x \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})\}$ est accréatif dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$; en effet c'est l'adjoint de $\Lambda_0 = \{[\gamma_1 - \gamma_x]; \gamma \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \gamma_x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})\}$, générateur infinitésimal du groupe continu d'isométries de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $(S(t)\gamma)(x) = \gamma(x-t)$. On conclut à l'aide du lemme généralisant une méthode de Konishi [28] :

Lemme 2.7. Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement croissante, Ω espace localement compact, Λ opérateur accréatif de $\mathcal{M}^1(\Omega)$, dx mesure positive sur Ω . Alors l'opérateur

$$\Lambda\phi = \{[u, \mu]; u \in L^1(\Omega, dx), [\phi(u), \mu] \in \Lambda\} \text{ est accréatif dans } \mathcal{M}^1(\Omega).$$

Démonstration : Soient $[u_i, \mu_i] \in \Lambda\phi$, $i=1,2$. Posons $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $u = u_1 - u_2$, $v = \phi(u_1) - \phi(u_2)$. On a $\mu = f dx + \mu^s$ avec μ^s mesure udx -singulière et $|\text{sign}_0 f| \leq |\text{sign}_0 u|$.

Puisque ϕ est strictement croissante, μ^s est vdx -singulière et $|\text{sign}_0 f| \leq |\text{sign}_0 v|$. Utilisant Sato [36], on a donc

$$\langle \mu, u \rangle_s = \|u\|_1 \left\{ \int_{u>0} f dx - \int_{u<0} f dx + \|\mu^s\|_1 \right\} = \frac{\|u\|_1}{\|v\|_1} \langle \mu, v \rangle_s \geq 0$$

puisque Λ est accréatif.

Remarque 2.9. L'accrétivité de l'opérateur $u \mapsto (u)_x$ ne suffit pas pour obtenir l'unicité de la solution au sens vague de $\frac{du}{dt} + \phi(u)_x = f$, $u(0) = u_0$. En effet étant donné X dual d'un espace de Banach séparable Y et $u = [0, T] \rightarrow X$ absolument continue, on peut affirmer que u est p.p. $\sigma(X, Y)$ -dérivable, et

que l'on a, F étant l'application de dualité de X p.p. $t \in]0, T[$,
 $\exists w \in F(u(t))$, $\langle \frac{du}{dt}(t), w \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2$; mais en général on n'a pas
p.p. $t \in]0, T[$, $\forall w \in F(u(t))$, $\langle u'(t), w \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2$; il suffit
par exemple de considérer $u : t \in [0, 1] \mapsto x_{[0, t]} \in \mathcal{H}^1([0, 1])$:
on a $\frac{du}{dt}(t) = \delta_t$, $\langle \delta_t, u(t) \rangle_s = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = t$, $-\langle -\delta_t, u(t) \rangle_s = -t$.
Donc si A est un opérateur accréatif au sens de Browder, il y a
unicité de la solution au sens $\sigma(X, Y)$ de $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$,
 $u(0) = u_0$; par contre, a priori, on ne peut rien affirmer si A
est seulement accréatif. Or l'opérateur
 $\Lambda = \{[v, v_x]; v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}), v_x \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})\}$ n'est pas accréatif au sens de
Browder.

Remarque 2.10. Lorsque $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue décroissante, une
démonstration analogue à celle du lemme 2.6. permet de montrer que

$$\int_x^{+\infty} (\mathcal{J}_\lambda^\phi h - \mathcal{J}_\lambda^\phi \hat{h})^+ \leq \int_x^{+\infty} (h - \hat{h})^+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall h, \hat{h} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \forall \lambda > 0.$$

On en tire en particulier qu'étant donné $u \in D(\hat{A}_\phi) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, pour
tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_x^{+\infty} [(A_\phi)_\lambda u]^+ \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} [(A_\phi)_\lambda u]^- \quad \text{convergent en croissant}$$

lorsque $\lambda \downarrow 0$.

3. Equation non linéaire du type "diffusion des gaz"

Nous nous proposons d'étudier l'équation

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \phi(u) = v & \text{sur }]0, T[\times \Omega \\ - \frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} \in \beta(u) & \text{sur } [0, T] \times \Gamma \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord régulier Γ (de classe C^2 suffira),

β est un graphe maximal monotone de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

ϕ est une application strictement croissante continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose $0 \in \beta(0)$ et $\phi(0) = 0$ (on peut toujours le faire sans restreindre la généralité dès que $0 \in R(\beta)$).

Suivant [13], nous poserons la définition suivante :

Définition 2.4. Soient $v \in L^1(\Omega)$, $w \in L^1(\Gamma)$. On appelle solution faible de $-\Delta u = v$ sur Ω , $+\frac{\partial u}{\partial \nu} = w$ sur Γ , toute fonction $u \in W^{1,1}(\Omega)$

telle que $\int_{\Omega} u_x f_x = \int_{\Omega} v f + \int_{\Gamma} w f \quad \forall f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$,

et nous utiliserons le résultat suivant de [13] :

Lemme 2.8. Soient $v \in L^1(\Omega)$, $w \in L^1(\Gamma)$, u solution faible de $u - \Delta u = v$ sur Ω , $\frac{\partial u}{\partial \nu} = w$ sur Γ . Alors $u \in W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \frac{N}{N-1}$ et

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C_q \{ \|v\|_{L^1(\Omega)} + \|w\|_{L^1(\Gamma)} \} \text{ où } C_q \text{ ne dépend que de } q, N \text{ et } \Omega.$$

Ce lemme montre que $\{[u, v, w] \in W^{1,1}(\Omega) \times L^1(\Omega) \times L^1(\Gamma) ; u \text{ solution faible de } -\Delta u = v \text{ sur } \Omega, \frac{\partial u}{\partial \nu} = w \text{ sur } \Gamma\}$ est la fermeture dans $W^{1,q}(\Omega) \times L^1(\Omega) \times L^1(\Gamma)$ de $\{[u, -\Delta u, \frac{\partial u}{\partial \nu}] ; u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})\}$. En particulier on en déduit que si u est solution faible de $-\Delta u = v$ sur Ω , $\frac{\partial u}{\partial \nu} = w$ sur Γ , on a pour tout $p \in P$ et tout $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, $f \geq 0$,

$$(19) \quad \int_{\Omega} p(u) v f + \int_{\Gamma} p(u) w f \geq \int_{\Omega} p(u) u_x f_x.$$

Nous définissons l'opérateur A (ou $A_{\beta, \phi}$ lorsqu'il sera nécessaire de préciser)

$$A = \{[u, v] \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) ; \text{il existe } w \in L^1(\Gamma) \text{ tel que}$$

$h = \phi(u)$ soit solution faible de $-\Delta h = v$ sur Ω , $\frac{\partial h}{\partial \nu} = w$ sur Γ et $-w(x) \in \beta(u(x))$ p.p. sur $\Gamma\}$.

Pour que cette définition ait bien un sens il faut définir la trace de u sur Γ : nous poserons naturellement $u|_{\Gamma} = \phi^{-1}(\phi(u)|_{\Gamma})$ qui a un sens puisque $\phi(u) \in W^{1,1}(\Omega)$.

Nous poserons $J_{\lambda} = (I + \lambda A)^{-1}$ (ou $J_{\lambda}^{\beta, \phi}$ lorsqu'il sera nécessaire de préciser).

Remarquons $J_{\lambda}^{\beta, \phi} = J_1^{\lambda \beta, \lambda \phi}$, $A_{\beta, \phi} = A_{\beta, I} \phi$.

Théorème 2.1. L'opérateur A vérifie les propriétés suivantes :

1) $D(A)$ est dense dans $L^1(\Omega)$,

2) $R(I+A) = L^1(\Omega)$,

3) A est T-accrétif ; plus précisément on a pour tout $\lambda > 0$, $u_1, u_2 \in L^1(\Omega)$

$$(20) \quad \int_{\Omega} (J_{\lambda} u_1 - J_{\lambda} u_2)^+ + \lambda \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi(J_{\lambda} u_1)}{\partial \nu} - \frac{\partial \phi(J_{\lambda} u_2)}{\partial \nu} \right) \leq \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^+$$

4) A vérifie la condition (M_0) ,

5) $\phi(J_{\lambda})$ est borné et uniformément continu des bornés de $L^1(\Omega)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

6) $\{[u, v, h, w] \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \times W^{1,1}(\Omega) \times L^1(\Gamma) ; [u, v] \in A, h = \phi(u), w = \frac{\partial h}{\partial \nu}\}$ est la fermeture dans $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times L^1(\Gamma)$ de $\{[u, -\Delta \phi(u), \phi(u), \frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu}] ; u \in L^1(\Omega), \phi(u) \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega), -\frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} \in \beta(u) \text{ p.p. sur } \Gamma\}$.

Démonstration : On a trivialement $D(A) \supset \{u \in L^1(\Omega) ; \phi(u) \in D(\Omega)\}$.

Or cette dernière partie est dense dans $L^1(\Omega)$ (cf. p.e. lemme 17 de [20]). D'où le 1).

Utilisant (19), soit $[u_i, v_i] \in A$, $i=1,2$; pour tout $p \in P_0$ on a

$$\int_{\Omega} p(\phi(u_1) - \phi(u_2))(v_1 - v_2) \geq - \int_{\Gamma} p(\phi(u_1) - \phi(u_2)) \left(\frac{\partial \phi(u_1)}{\partial \nu} - \frac{\partial \phi(u_2)}{\partial \nu} \right) \geq 0$$

d'où en faisant $p(s) \rightarrow \text{sign}_0^+ s$, $\int_{\Omega} \text{sign}_0^+(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) \geq 0$. Donc A est T-accrétif. Lorsque β est univoque, on en déduit aussi (20) car alors

$$\int_{\Gamma} \text{sign}_0^+(\phi(u_1) - \phi(u_2)) \left(\frac{\partial \phi(u_1)}{\partial v} - \frac{\partial \phi(u_2)}{\partial v} \right) = - \int \left(\frac{\partial \phi(u_1)}{\partial v} - \frac{\partial \phi(u_2)}{\partial v} \right)^+ .$$

Utilisant (19), on déduit de même que A vérifie la condition (M_0) .

Pour continuer la démonstration, utilisons diverses propositions particulières.

Proposition 2.16. Soit $v \in L^\infty(\Omega)$. Il existe $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tel que

$$\phi(u) \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega), \quad u - \Delta \phi(u) = v \quad \text{p.p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial \phi(u)}{\partial v} \in \beta(u) \quad \text{p.p. sur } \Gamma.$$

De plus $\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ et

$$\|\phi(u)\|_{H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C \left\{ \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{|r| \leq \|v\|_\infty} |\phi(r) - r| \right\} \quad \text{où } C \text{ est}$$

une constante ne dépendant que de Ω et N .

Démonstration : Posons

$$k = \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \phi_1(r) = \begin{cases} \phi_1(k) + r - k & \text{si } r \geq k \\ \phi(r) & \text{si } |r| \leq k, \\ \phi_1(-r) + r - k & \text{si } r \leq -k \end{cases} \quad \beta_1 = \beta \circ \phi_1^{-1}$$

Le graphe β_1 étant maximal monotone, d'après le théorème 1.10 de

[9], l'opérateur $A_2 = \{[h, v] \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega); h \in H^2(\Omega), -\Delta h = v$

p.p. sur Ω , $-\frac{\partial h}{\partial v} \in \beta_1(h)$ p.p. sur $\Gamma\}$ est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$; de plus si $h + A_2 h = v$, on a

$$\|h\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et si } v \in L^p(\Omega) \text{ avec } p > N, h \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ et}$$

$$\|h\|_{W^{1,\infty}} \leq C \|v\|_{L^p} \quad \text{où les constantes } C \text{ ne dépendent que de } N, \Omega \text{ et } p$$

Puisque $A_2 \in A^{\beta_1, I}$, il vérifie la condition (M_0) . On en déduit, comme à la Proposition 2.5., l'existence de $h \in L^2(\Omega)$ tel que $\phi_1^{-1}(h) + A_2 h = v$. Posant $u = \phi_1^{-1}(h)$, on a $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Donc $h = \phi(u)$, $h \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ et $h + A_2 h = v + (\phi(u) - u)$, d'où

$$\|h\|_{H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C(|\Omega|^{1/2} + |\Omega|^{1/p}) \{ \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{|r| \leq \|v\|_\infty} |\phi(r) - r| \}.$$

Proposition 2.17. Soient ϕ_n suite d'applications strictement croissantes continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\bigcap_n R(\phi_n) \supset R(\phi)$ et ϕ_n^{-1} converge

vers ϕ^{-1} uniformément sur tout compact de $R(\phi)$; β_n suite de graphes maximaux monotones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $(I + \lambda \beta_n)^{-1} r \rightarrow (I + \lambda \beta)^{-1} r$ pour tout $r \in D(\beta)$ et tout $\lambda > 0$; $v \in L^\infty(\Omega)$ et $u_n \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solution

de $u_n - \Delta \phi_n(u_n) = v$ sur Ω , $-\frac{\partial \phi_n(u_n)}{\partial \nu} \in \beta_n(u_n)$ sur Γ . Alors $\phi_n(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $H^2(\Omega)$, $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ où u est la solution de $u - \Delta \phi(u) = v$ sur Ω , $-\frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} \in \beta(u)$ sur Γ .

Démonstration : D'après la Proposition 2.16. $\|\phi_n(u_n)\|_{H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)}$

est borné. Soient n_k suite extraite telle que $\phi_{n_k}(u_{n_k}) = h_{n_k} \rightarrow h$ dans $H^2(\Omega)$ et $h_{n_k} \rightarrow h$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Alors

$u_{n_k} = \phi_{n_k}^{-1}(h_{n_k}) \rightarrow u = \phi^{-1}(h)$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Donc $u - \Delta h = v$ p.p. sur Ω .

D'autre part $\frac{\partial h_{n_k}}{\partial \nu} \rightarrow \frac{\partial h}{\partial \nu}$ dans $L^2(\Omega)$, donc $-\frac{\partial h}{\partial \nu} \in \beta(u)$ p.p. sur Γ .

Fin de la démonstration du théorème 2.1. Démontrons d'abord (20) pour

$v_1, v_2 \in L^\infty(\Omega)$. On peut toujours supposer $\lambda = 1$. Soit β_μ la régularisée Yosida de β , $u_{i,\mu} = (I + A_{\beta_\mu, \phi})^{-1} v_i$, $h_{i,\mu} = \phi(u_{i,\mu})$. D'après la proposition 2.17., $u_{i,\mu} \rightarrow u_i$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $h_{i,\mu} \rightarrow h_i$ dans $H^2(\Omega)$. Puisque β_μ est univoque, on a

$\int_{\Omega} (u_{1,\mu} - u_{2,\mu})^+ + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial h_{1,\mu}}{\partial \nu} - \frac{\partial h_{2,\mu}}{\partial \nu} \right) \leq \int_{\Omega} (v_1 - v_2)^+ .$ D'où (20) à la limite.

Soit alors $v \in L^1(\Omega)$. Considérons $v_n = \begin{cases} v & \text{si } |v| \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

posons $u_n = (I+A)^{-1} v_n$ qui existe d'après la Proposition 2.16. On a d'après le paragraphe précédent

$$\|u_n - u_m\|_{L^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \phi(u_n)}{\partial \nu} - \frac{\partial \phi(u_m)}{\partial \nu} \right\|_{L^1(\Gamma)} \leq \|v_n - v_m\|_{L^1(\Omega)} .$$

Donc $u_n \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$, $\frac{\partial \phi(u_n)}{\partial \nu} \rightarrow w$ dans $L^1(\Gamma)$.

D'autre part d'après le lemme 2.8. :

$$\begin{aligned} \|\phi(u_n)\|_{W^{1,1}} &\leq C_1 \left\{ \|v_n + \phi(u_n) - u_n\|_{L^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \phi(u_n)}{\partial \nu} \right\|_{L^1(\Gamma)} \right\} \\ &\leq C_1 \left\{ \|\phi(u_n)\|_{L^1(\Omega)} + 2\|v\|_{L^1} \right\} . \end{aligned}$$

Supposons $\|\phi(u_n)\|_{W^{1,1}}$ non borné. Il existe alors une suite extraite n_k telle que $\|\phi(u_{n_k})\|_{W^{1,1}} \rightarrow +\infty$, $u_{n_k} \rightarrow u$ p.p. sur Ω . Posant

$$g_{n_k} = \frac{\phi(u_{n_k})}{\|\phi(u_{n_k})\|_{W^{1,1}}} , \text{ on a } \|g_{n_k}\|_{W^{1,1}} = 1 , g_{n_k} \rightarrow 0 \text{ p.p. sur } \Omega , \text{ donc}$$

$g_{n_k} \rightarrow 0$ dans $L^1(\Omega)$ ce qui est contradictoire puisque

$$1 \leq C_1 \left\{ \|g_{n_k}\|_{L^1(\Omega)} + \frac{2\|v\|_1}{\|\phi(u_{n_k})\|_{W^{1,1}}} \right\} . \text{ Donc } \|\phi(u_n)\|_{W^{1,1}} \text{ est borné et}$$

$\phi(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^1(\Omega)$. Alors utilisant le lemme 2.8.

$$\|\phi(u_n) - \phi(u_m)\|_{W^{1,q}} \leq C_q \left\{ \|\phi(u_n) - \phi(u_m)\|_{L^1} + 2\|v_n - v_m\|_{L^1} \right\}$$

donc $\phi(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$.

D'où $h = \phi(u)$ est solution $u - \Delta h = v$ sur Ω , $\frac{\partial h}{\partial \nu} = w$ sur Γ et $-w \in \beta(u)$ p.p. sur Γ . Ceci démontre 2). Les propriétés 5) et 6) résultent de la démonstration précédente.

Remarque 2.11. Utilisant les résultats de [9], on obtient des régularités sur $\phi(J_\lambda v)$ en faisant des hypothèses sur v et ϕ . Notons par exemple :

si $|\phi(r)| \leq k_1 + k_2 |r|^p$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, ($1 \leq p < +\infty$), alors $\phi(J_\lambda)$ envoie les bornés de $L^{2p}(\Omega)$ (resp. $L^{pq}(\Omega)$) sur les bornés de $H^2(\Omega)$ (resp. $W^{1,q}(\Omega)$) ($2 \leq q < N$), la borne dans l'espace d'arrivée ne dépendant que de Ω , N , k_1 , k_2 , p (resp. et q).

On peut aussi remarquer que, sans hypothèses sur ϕ , $\phi(J_\lambda)$ envoie les bornés $L^{\Phi}(\Omega)$ (où $\Phi(s) = \int_0^s \phi(r) dr$) sur les bornés de $H^1(\Omega)$; posant enfin $\theta(s) = \int_0^s \phi'(r)^{1/2} dr$, $\theta(J_\lambda)$ envoie les bornés de $L^2(\Omega)$ sur les bornés de $H^1(\Omega)$.

Remarque 2.12. Lorsque $\beta + \phi$ est surjective, le théorème 2.1. se déduit du cas particulier $\phi = I$ à l'aide de la Proposition 2.6. On peut en fait démontrer :

"soient ψ graphe maximal monotone surjectif avec $0 \in \psi(0)$, $v \in L^1(\Omega)$, $w \in L^1(\Gamma)$, il existe $u \in W^{1,1}(\Omega)$ tel que

$$\psi(u) - \Delta u \ni v \text{ sur } \Omega, \quad \beta(u) + \frac{\partial u}{\partial \nu} \ni w \text{ sur } \Gamma."$$

Utilisant les théorèmes généraux sur les solutions intégrales, nous obtenons :

Corollaire 2.12. Soient $u_0 \in L^1(\Omega)$, $v \in L^1([0, T[\times \Omega)$. Il existe $u \in L^1([0, T[\times \Omega)$ unique tel que

1) $u(t) \rightarrow u_0$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow 0$ essentiellement.

2) Pour tout $g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ tel que $\phi(g) \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ et $-\frac{\partial \phi(g)}{\partial \nu} \in \beta(g)$ p.p. sur Γ , et pour tout $\gamma \in \mathcal{D}^+([0, T[)$, il existe $\alpha \in L^\infty([0, T[\times \Omega)$ tel que $\alpha \in \text{sign}(u-g)$ p.p. sur $[0, T[\times \Omega$ et

$$\int_{[0, T[\times \Omega} \alpha \{ (u-g)\gamma' + (v + \Delta \phi(g))\gamma \} \geq 0.$$

De plus $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega))$

$$\begin{aligned} \|u(t)^+\|_p &\leq \|u_0^+\|_p + \int_0^t \|v(\tau)^+\|_p d\tau \\ \|u(t)^-\|_p &\leq \|u_0^-\|_p + \int_0^t \|v(\tau)^-\|_p d\tau \end{aligned} \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty, \quad \forall t \in [0, T].$$

Si $\hat{u}$ est la solution correspondant à $\hat{u}_0 \in L^1(\Omega)$ et $\hat{v} \in L^1(]0, T[\times \Omega)$,

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))^+\|_1 \leq \|(u_0 - \hat{u}_0)^+\|_1 + \int_0^t \|(v(\tau) - \hat{v}(\tau))^+\|_1 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Cependant la forme de solutions intégrales n'est pas très sympathique, car il n'est pas tellement commode en général de déterminer $\{g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}); \phi(g) \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \text{ et } -\frac{\partial \phi(g)}{\partial \nu} \in \beta(g) \text{ p.p. sur } \Gamma\}$. Nous obtenons des résultats plus précis en faisant des hypothèses supplémentaires.

Notons d'abord le résultat suivant :

Proposition 2.18. Supposons ϕ et ϕ^{-1} localement lipschitziennes. Alors pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$, la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ est solution forte. Plus précisément :

$$u \in W_{loc}^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$$

$$\phi(u) \in L_{loc}^2(0, T; H^2(\Omega))$$

$$\frac{du}{dt}(t) - \Delta \phi(u(t)) = v(t) \text{ p.p. } t \in]0, T[$$

$$-\frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} \in \beta(u) \text{ p.p. }]0, T[\times \Gamma.$$

Démonstration : Soit u la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$,

$u(0) = u_0$. Nous savons que

$$\|u\|_{L^\infty(]0, T[\times \Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + T\|v\|_{L^\infty(]0, T[\times \Omega)} = M; \text{ les valeurs de } \phi$$

pour $|r| \gg M$ n'intervenant pas, nous pouvons toujours supposer ϕ et ϕ^{-1} lipschitziennes. Supposons de plus d'abord ϕ de classe C^1 .

Soit j la primitive de β telle que $j(0) = 0$. Posons

$$\Psi = u \in L^2(\Omega) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2 + \int_{\Gamma} j(u) & \text{si } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous savons (cf. [2]) que Ψ est convexe s.c.i. sur $L^2(\Omega)$ de sous-différentielle, $\partial \Psi = \{[u, v] \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega); u \in H^2(\Omega), -\Delta u = v,$

$-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u)$ p.p. sur Γ . Soit Ψ_λ la régularisée de Ψ .

L'opérateur $(\partial \Psi_\lambda)\phi$ est partout défini lipschitzien sur $L^2(\Omega)$;

soit u_λ la solution (forte) de $\frac{du_\lambda}{dt} + (\partial \Psi_\lambda)\phi(u_\lambda) = v$, $u_\lambda(0) = u_0$,

On a $\|u_\lambda\|_{L^\infty([0,T] \times \Omega)} \leq M$ et $u_\lambda \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega))$

d'après le lemme suivant et les théorèmes de convergence :

Lemme 2.9. Soit A maximal monotone dans $L^2(\Omega)$, accrétif dans $L^1(\Omega)$ vérifiant la condition (M_0) . Alors A_λ vérifie les mêmes propriétés et pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement lipschitzienne strictement croissante avec $\phi(0) = 0$,

$(I + A_\lambda \phi)^{-1}u \rightarrow (I + A\phi)^{-1}u$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$ pour tout $u \in L^\infty(\Omega)$.

Fin de la démonstration de la Proposition 2.18. La fonction

$t \mapsto \Psi_\lambda(\phi(u_\lambda(t)))$ est absolument continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ et $\frac{d}{dt} \Psi_\lambda(\phi(u_\lambda(t))) = \int_\Omega (\partial \Psi_\lambda)(\phi(u_\lambda(t))) \phi'(u_\lambda(t)) \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ p.p. $t \in]0,T[$.

D'où :

$$\int_0^T t \int_\Omega \phi'(u_\lambda(t)) \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 \leq \int_0^T \Psi_\lambda(\phi(u_\lambda(t))) + \int_0^T t \int_\Omega \phi'(u_\lambda(t)) \frac{du_\lambda}{dt}(t) v.$$

Mais $\Psi_\lambda(\phi(u_\lambda(t))) \leq \int_\Omega (v \frac{du_\lambda}{dt}(t)) \phi(u_\lambda(t))$ et donc posant

$$\Phi(r) = \int_0^r \phi(s) ds, \quad \int_0^T \Psi_\lambda(\phi(u_\lambda(t))) \leq \int_0^T \int_\Omega v \phi(u_\lambda) + \int_\Omega \Phi(u_0).$$

Posant k_1, k_2 les constantes de Lipschitz de ϕ et ϕ^{-1} sur $\{r \leq M\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_2} \int_0^T \int_\Omega t \left| \frac{du_\lambda}{dt} \right|^2 &\leq T|\Omega| \|v\|_{L^\infty} k_1 M + |\Omega| k_1 \|u_0\|_{L^\infty}^2 \\ &\quad + \left(\int_0^T \int_\Omega t \left| \frac{du_\lambda}{dt} \right|^2 \right)^{1/2} T^{1/2} |\Omega|^{1/2} k_1 \|v\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

d'où $\|t \frac{du_\lambda}{dt}\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} \leq C$ ne dépendant que de $\|u_0\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty}, k_1,$

k_2 .

Soit $\lambda_n \rightarrow 0$ tel que $\sqrt{t} \frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow \sqrt{t} w$ dans $L^2([0, T[\times \Omega)$.

Pour tout $0 < s < t \leq T$, $u_\lambda(t) = u_\lambda(s) + \int_s^t \frac{du_\lambda}{dt}(\tau) d\tau$ et donc à la limite dans $L^2(\Omega)$ faible, $u(t) = u(s) + \int_s^t w(\tau) d\tau$. Donc $u \in W_{loc}^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$ et $\frac{du}{dt}(t) = w(t)$ p.p.t.

On achève la démonstration pour ϕ localement lipschitzienne quelconque par approximation en utilisant la même estimation et la Proposition 2.17.

Démonstration du Lemme 2.9. L'opérateur A_λ est évidemment maximal monotone dans $L^2(\Omega)$ et accréatif dans $L^1(\Omega)$. On a pour $p \in P_0$,

$\int p(u) A_\lambda u \geq \int p(J_\lambda u) A_\lambda u \geq 0$. Soit alors $u \in L^\infty(\Omega)$; posons

$u_0 = (I + A\phi)^{-1}u$, $u_\lambda = (I + A_\lambda\phi)^{-1}u$. On a $\|u_\lambda\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty}$. On a, utilisant la monotonie de A

$$\int (u_\lambda - u_0)(\phi(u_\lambda) - \phi(u_0)) \leq \lambda \int |u_\lambda - u_0| |A_\lambda \phi(u_\lambda)| \leq 4\lambda |\Omega| \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2.$$

Donc $\phi(u_\lambda) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^2(\Omega)$ et $u_\lambda \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$.

Remarque 2.13. Cette Proposition apparaît comme un cas particulier d'un résultat plus général concernant les équations $\frac{du}{dt} + A\phi(u) \ni v$, $u(0) = u_0$ où A est la sous-différentielle d'une fonction convexe s.c.i. sur $L^2(\Omega)$.

Proposition 2.19. Supposons β partout définie. Alors pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $v \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$, la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ vérifie

$$\phi(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Il existe $w \in L^1([0, T[\times \Gamma)$ unique tel que $w \in \beta(u)$ p.p. sur $]0, T[\times \Gamma$ et pour tout $f \in \mathcal{C}_0^1([0, T[\times \bar{\Omega})$,

$$(21) \quad \int_{]0, T[\times \bar{\Omega}} (u f_t + v f) + \int_{\Omega} u_0(x) f(0, x) = \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u)_x f_x + \int_{]0, T[\times \Gamma} w f.$$

Si $\hat{u}$ est la solution correspondant à $\hat{u}_0$, $\hat{v}$ et $\hat{w}$ définie par (21), pour tout $\gamma \in \mathcal{D}(]0, T[)$, $\gamma \geq 0$, il existe $\alpha \in L^\infty([0, T[\times \Omega)$

tel que $\alpha \in \text{sign}(u-\hat{u})$ p.p. sur $]0, T[\times \Omega$ et

$$(22) \quad \int_{]0, T[\times \Omega} \alpha \{ (u-\hat{u})_\gamma' + (v-\hat{v})_\gamma \} \geq \int_{]0, T[\times \Gamma} |w-\hat{w}|_\gamma$$

Enfin si ϕ est localement lipschitzienne, $\sqrt{t} \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L^2(]0, T[\times \Omega)$.

Démonstration : Supposons d'abord les données régulières, ϕ et ϕ^{-1} localement lipschitziennes, β univoque. Multipliant l'équation

$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \phi(u) = v$ par $\phi(u)$ et intégrant par parties, on a en posant

$$\phi(r) = \int_0^r \phi(s) ds,$$

$$\int_{]0, T[\times \Omega} \frac{\partial}{\partial t} \phi(u) + \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u)^2_x + \int_{]0, T[\times \Gamma} \phi(u) \beta(u) = \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u) v$$

d'où $\|\phi(u)\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C$ ne dépendant que de $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$\|v\|_{L^1(0, T; L^\infty(\Omega))}$ et $\sup\{|\phi(r)|; |r| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^1(0, T; L^\infty(\Omega))}\}$.

L'équation (21) est évidemment vérifiée. Pour démontrer (22) multiplions $\frac{\partial}{\partial t}(u-\hat{u}) - \Delta(\phi(u)-\phi(\hat{u})) = v-\hat{v}$ par $p(\phi(u)-\phi(\hat{u}))_\gamma$ avec $p \in P$ et intégrons par parties :

$$\begin{aligned} \int_{]0, T[\times \Omega} \frac{\partial}{\partial t}(u-\hat{u}) p(\phi(u)-\phi(\hat{u}))_\gamma + (\phi(u)-\phi(\hat{u}))^2_x p'(\phi(u)-\phi(\hat{u}))_\gamma \\ + \int_{]0, T[\times \Gamma} (\beta(u)-\beta(\hat{u})) p(\phi(u)-\phi(\hat{u}))_\gamma = \int_{]0, T[\times \Omega} (v-\hat{v}) p(\phi(u)-\phi(\hat{u}))_\gamma \end{aligned}$$

Supprimons le deuxième terme ≥ 0 et faisons tendre $p(s)$ vers $\text{sign}_0 s$. Compte tenu de $(\frac{\partial}{\partial t} h) \text{sign}_0 h = \frac{\partial}{\partial t} |h|$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{]0, T[\times \Omega} \text{sign}_0(u-\hat{u}) \{ (u-\hat{u})_\gamma' + (v-\hat{v})_\gamma \} &\geq \int_{]0, T[\times \Gamma} \text{sign}_0(u-\hat{u}) (\beta(u)-\beta(\hat{u}))_\gamma \\ &= \int_{]0, T[\times \Gamma} |\beta(u)-\beta(\hat{u})|_\gamma. \end{aligned}$$

D'autre part d'après la Proposition 2.18 :

$$\int_{]0, T[\times \Omega} t \phi'(u) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u) v + \int_{\Omega} \Phi(u_0) + \int_{]0, T[\times \Omega} t \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial t} v,$$

$$\text{d'où} \quad \int_{]0,T[\times \Omega} t \left| \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \right|^2 \leq C + C_1 \left(\int_{]0,T[\times \Omega} t \left| \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{où} \quad C = \sup_{|r| \leq M} |\phi'(r)| \sup_{|r| \leq M} |\phi(r)| \{ \|v\|_{L^1([0,T[\times \Omega))} + \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \}$$

$$C_1 = \sup_{|r| \leq M} |\phi'(r)| \| \sqrt{t} v \|_{L^2([0,T[\times \Omega))}, \quad M = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^1(0,T; L^\infty(\Omega))}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. Soient ϕ_n et β_n réguliers tendant vers ϕ et β au sens de la Proposition 2.16. et u_n la solution intégrale de $\frac{du_n}{dt} + A_{\beta_n, \phi_n} u_n = v$, $u_n(0) = u_0$. D'après les théorèmes de convergence $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega))$; puisque $\phi_n(u_n)$ est borné dans $L^\infty([0,T[\times \Omega)$ et $L^2([0,T[; H^1(\Omega))$, on en déduit en utilisant le lemme suivant : $\phi_n(u_n) \rightharpoonup \phi(u)$ dans $L^2([0,T[; H^1(\Omega))$, $\phi_n(u_n)|_\Gamma \rightarrow \phi(u)|_\Gamma$ dans $L^2([0,T[\times \Gamma)$.

Lemme 2.10. Soient $u_n \in L^1([0,T[\times \Omega)$, $u_n \rightarrow u$ dans $L^1([0,T[\times \Omega)$; ϕ_n continue strictement croissante, $\phi_n^{-1} \rightarrow \phi^{-1}$ uniformément sur tout compact où ϕ est strictement croissante; $1 \leq q < +\infty$. On suppose $\phi_n(u_n)$ borné dans $L^q(0,T; W^{1,q}(\Omega))$ et $\|\phi_n(u_n(t))\|_{L^1(\Omega)} \leq \gamma(t)$ p.p. $t \in]0,T[$ avec $\gamma \in L^q([0,T[)$. Alors $\phi_n(u_n) \rightharpoonup \phi(u)$ dans $L^q(0,T; W^{1,q}(\Omega))$, $\phi_n(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^q(0,T; W^{s,q}(\Omega))$ pour tout $0 \leq s < 1$.

Fin de la démonstration de la Proposition 2.19. On a d'autre part $\beta_n(u_n)$ borné dans $L^\infty([0,T[\times \Gamma)$; soit (n_k) suite extraite telle que $\beta_{n_k}(u_{n_k}) \rightharpoonup w$ dans $L^2([0,T[\times \Gamma)$. On a $w \in \beta \circ \phi^{-1}(\phi(u))$ p.p. sur $]0,T[\times \Gamma$ et à la limite (21). Puisque $\{f|_\Gamma; f \in \mathcal{C}_0^1([0,T[\times \bar{\Omega}])\}$ est dense dans $L^1([0,T[\times \Gamma)$, w est unique et $\beta_n(u_n)$ converge faiblement dans $L^2([0,T[\times \Gamma)$. On obtient alors facilement (22).

Si ϕ est localement lipschitzienne, on peut choisir ϕ_n de telle sorte que ϕ'_n soit uniformément bornée sur les compacts de $\mathbb{R}$ et donc $\sqrt{t} \frac{\partial \phi_n(u_n)}{\partial t}$ borné dans $L^2([0,T[\times \Omega)$. Donc

$$\sqrt{t} \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L^2([0, T[\times \Omega) .$$

Démonstration du Lemme 2.10.

On a $\phi_n(u_n(t))$ borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ et $u_n(t) \rightarrow u(t)$ dans $L^1(\Omega)$ p.p. $t \in]0, T[$. Soit $t \in]0, T[$ tel qu'il en soit ainsi. Alors $\phi_n(u_n(t))$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. Soit h un point d'accumulation ; il existe n_k suite extraite telle que $\phi_{n_k}(u_{n_k}(t)) \rightarrow h$ p.p. sur Ω et par suite $u_{n_k}(t) \rightarrow \phi^{-1}(h)$ p.p. sur Ω . Puisque $u_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ dans $L^1(\Omega)$, $\phi^{-1}(h) = u(t)$ et $h = \phi(u(t))$. Donc $\phi_n(u_n(t)) \rightarrow \phi(u(t))$ dans $L^1(\Omega)$; ceci étant vrai p.p. $t \in]0, T[$, compte tenu de la domination, $\phi_n(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^q(0, T; L^1(\Omega))$ et donc $\phi(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega))$.

Considérons $0 \leq s < 1$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que

$$\|h\|_{W^{s,q}(\Omega)} \leq \varepsilon \|h\|_{W^{1,q}(\Omega)} + C_\varepsilon \|h\|_{L^1(\Omega)} .$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \|\phi(u_n) - \phi(u)\|_{L^q(0, T; W^{s,q}(\Omega))} &\leq \varepsilon \|\phi(u_n) - \phi(u)\|_{L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega))} \\ &\quad + C_\varepsilon \|\phi(u_n) - \phi(u)\|_{L^q(0, T; L^1(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \phi(u_n) \rightarrow \phi(u) \text{ dans } L^q(0, T; W^{s,q}(\Omega)) .$$

Proposition 2.20. Supposons $\phi(r) = (\text{sign}_0 r) |r|^v$ avec $1 \leq v < +\infty$ et β partout défini. Soient $p > 1$, $u_0 \in L^p(\Omega)$, $v \in L^1(0, T; L^p(\Omega))$. La solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ vérifie :

$$(\text{sign}_0 u) |u|^{\frac{v+p-1}{2}} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

$$\phi(u) \in L^q(0, T; W^{1,s}(\Omega)) \text{ avec } \begin{cases} \text{si } p \geq v+1, & q=s=2 \\ \text{si } p < v+1, & q=1+\frac{p-1}{v} \text{ et} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } N \leq 2, & s \text{ quelconque } < 2 \\ \text{si } N > 2, & s = \frac{2}{1+(1-\frac{p-1}{v})(1-\frac{2}{N})} \end{cases}$$

Il existe $w \in L^1([0, T[\times \Gamma)$ unique tel que $w \in \beta(u)$ p.p. sur $]0, T[\times \Gamma$ et

$$\int_{]0, T[\times \Omega} u f_t + v f + \int_{\Omega} u_0(x) f(0, x) = \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u)_{xx} + \int_{]0, T[\times \Gamma} w f$$

$$\forall f \in \mathcal{C}_0^1([0, T[\times \bar{\Omega}) .$$

Démonstration : Cherchons d'abord les estimations dans le cas régulier :

prenons $\phi_\varepsilon(r) = \phi(r) + \varepsilon r$ ($\varepsilon > 0$), $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$.

Soit u la solution de $\frac{du}{dt} + A_{\beta, \phi_\varepsilon} u = v$, $u(0) = u_0$.

$$\text{On a } \|u\|_{L^\infty(0, T; L^p(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^1(0, T; L^p(\Omega))} = C_1 .$$

Soit $p_\eta \in P_0$ tel que $p_\eta = (\text{sign}_0 r) |r|^{p-1}$ sur $\eta \leq |r| \leq \frac{1}{\eta}$.

Multipliant $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \phi_\varepsilon(u) = v$ par $p_\eta(u)$ et intégrant par parties, en

posant $P_\eta(r) = \int_0^r p_\eta(s) ds$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{]0, T[\times \Omega} \frac{\partial}{\partial t} P_\eta(u) + \int_{\eta \leq |u| \leq \frac{1}{\eta}} (p-1) \{v |u|^{v+p-3} + \varepsilon |u|^{p-2}\} u_x^2 \\ + \int_{\{|u| < \eta\} \cup \{|u| > \frac{1}{\eta}\}} P_\eta(u)_{xx} \phi_\varepsilon(u)_x \\ = \int_{]0, T[\times \Omega} v p_\eta(u) + \int_{]0, T[\times \Gamma} p_\eta(u) \frac{\partial \phi_\varepsilon(u)}{\partial \nu} , \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\eta \leq |u| \leq \frac{1}{\eta}} ((\text{sign}_0 u) |u|^{\frac{v+p-1}{2}})_x^2 \leq \frac{1}{v(p-2)} \left\{ \int_{]0, T[\times \Omega} v p_\eta(u) + \int_{\Omega} P_\eta(u_0) \right\}$$

et en faisant $\eta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{]0, T[\times \Omega} ((\text{sign}_0 u) |u|^{\frac{v+p-1}{2}})_x^2 \leq \frac{1}{v(p-1)} \{ \|v\|_{L^1(0, T; L^p(\Omega))}^{p-1} + \|u_0\|_{L^p(\Omega)}^p \} \\ = C_2 . \end{aligned}$$

D'autre part étant donné $\mu > 0$, si h_n est borné dans $L^1(\Omega)$ et $((\text{sign}_0 h_n)(h_n)^\mu)_x$ est borné dans $L^2(\Omega)$, $|h_n|^\mu$ est borné dans $L^2(\Omega)$ (cf. la démonstration du théorème 2.1.), et donc pour tout

$r < +\infty$ si $N \leq 2$, $r \leq \frac{2N}{N-2}$ si $N > 2$, il existe une constante C telle que

$$\| |h|^\mu \|_{L^r(\Omega)}^2 \leq C \{ \|h\|_{L^1(\Omega)}^{2\mu} + \|((\text{sign}_0 h) |h|^\mu)_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \}.$$

Appliquant ceci avec $\mu = \frac{v+p-1}{2}$, on aura

$$\|(\text{sign}_0 u) |u|^{\frac{v+p-1}{2}}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C_3$$

et

$$\| |u|^{\frac{v+p-1}{2}} \|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \leq C_4 \text{ dépendant de } r.$$

Lorsque $p \geq v+1$, on en déduit $\|\phi(u)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C_5$ et

$$\|\phi(u)\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \leq C_6. \text{ Lorsque } p < v+1, \text{ posant } q = 1 + \frac{p-1}{v},$$

$$\text{on a } \|\phi(u)\|_{L^q(0,T;L^{\frac{qr}{2}}(\Omega))} \leq C_7 \text{ et } \|\phi(u)_x\|_{L^q(0,T;L^s(\Omega))} \leq C_8 \text{ avec}$$

$$\text{avec } s = \frac{2rq}{rq+2(1-\frac{p-1}{v})}.$$

Le passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ se fait comme à la Proposition 2.18.

Plaçons-nous dans le cas général et considérons $u_{0,n} \in L^\infty(\Omega)$, $v_n \in L^1(0,T;L^\infty(\Omega))$ tels que $u_{0,n} \rightarrow u_0$ dans $L^p(\Omega)$, $v_n \rightarrow v$ dans $L^1(0,T;L^p(\Omega))$ et soit u_n la solution intégrale de $\frac{du_n}{dt} + Au_n = v_n$, $u_n(0) = u_{0,n}$ et w_n défini par (21). D'après (22), w_n converge dans $L^1([0,T[\times \Gamma)$; soit w sa limite. On sait d'autre part que $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega))$. Puisque $\phi(u_n)$ est borné dans $L^q(0,T;W^{1,s}(\Omega))$, $\phi(u_n) \rightharpoonup \phi(u)$ dans $L^q(0,T;W^{1,s}(\Omega))$, en utilisant le lemme suivant :

Lemme 2.11. Soient $u_n \in L^1([0,T[\times \Omega)$, $u_n \rightarrow u$ dans $L^1([0,T[\times \Omega)$; ϕ_n continue strictement croissante, $\phi_n^{-1} \rightarrow \phi^{-1}$ uniformément sur tout compact où ϕ est strictement croissante; $1 < q < +\infty$, $1 < s < +\infty$.

On suppose $\phi_n(u_n)$ borné dans $L^q(0, T; W^{1, s}(\Omega))$. Alors $\phi_n(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^q(0, T; W^{1, s}(\Omega))$.

Achevons la démonstration de la Proposition. On a donc à la limite $\phi(u) \in L^q(0, T; W^{1, s}(\Omega))$,

$$\int_{]0, T[\times \Omega} u f_t + v f + \int_{\Omega} u_0(x) f(0, x) = \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u)_x f_x + \int_{]0, T[\times \Gamma} w f$$

$$\forall f \in \mathcal{C}_0^1([0, T[\times \bar{\Omega})$$

$$\text{et de même } (\text{sign}_0 u) |u|^{\frac{v+p-1}{2}} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Reste à montrer que $w \in \beta(u)$ p.p. sur $]0, T[\times \Gamma$. Copiant Lions (cf. lemme 1.1. du chapitre 3 de []), étant donné $\mu > 1$, $s > 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que

$$h_1, h_2 \in L^1(\Omega), |h_i|^\mu \in W^{1, s}(\Omega) \Rightarrow \|h_1 - h_2\|_{\Gamma} \Big|_{L^{\mu s}(\Gamma)}$$

$$\leq \varepsilon \{ \| |h_1|^\mu \|_{W^{1, s}(\Omega)} + \| |h_2|^\mu \|_{W^{1, s}(\Omega)} \}^{1/\mu} + \|h_1 - h_2\|_{L^1(\Omega)}.$$

Donc $u_n|_{\Gamma} \rightarrow u|_{\Gamma}$ dans $L^{vq}(0, T; L^{vs}(\Gamma))$ et donc $w \in \beta(u)$ p.p. sur $]0, T[\times \Gamma$.

Corollaire 2.13. Supposons $\phi(r) = (\text{sign}_0 r) |r|^v$ avec $1 < v < +\infty$ et β partout défini. Soient $u_0 \in L^p(\Omega)$ avec $p > 1$ et $v \in L^1(0, T; L^q(\Omega))$ avec $+\infty > q > v+1$. Alors la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ vérifie :

$$u \in L_{loc}^\infty([0, T]; L^q(\Omega)), \phi(u) \in L_{loc}^2([0, T]; H^1(\Omega)), \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L_{loc}^2([0, T]; L^2(\Omega))$$

Démonstration : On a pour $r \geq 1$, par un calcul formel que l'on justifie de manière habituelle,

$$\int_{]0, t[\times \Omega} r \frac{\partial}{\partial \tau} |u|^r \leq \int_{]0, t[\times \Omega} r \tau |v| |u|^{r-1}$$

d'où

$$t \int_{\Omega} |u(t)|^r \leq \int_{]0, t[\times \Omega} r \tau |v| |u|^{r-1} + \int_{]0, t[\times \Omega} |u|^r.$$

On en déduit déjà que $tu \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.

Considérons q_0 le sup des r tels que $u \in L_{loc}^\infty([0, T]; L^r(\Omega))$, supposons $q_0 < q$. Notons d'abord que pour $1 < r \leq 2 - \frac{1}{q}$,

$$\int_{]0, T[\times \Omega} r t |v| |u|^{r-1} \leq r \|v\|_{L^1(0, T; L^{\frac{1}{2-r}}(\Omega))} \left\| t^{\frac{1}{r-1}} u \right\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))}^{r-1} < +\infty,$$

et pour $r \leq p + (v-1)$, $\int_{]0, T[\times \Omega} |u|^r < +\infty$ d'après la Proposition 2.19.

Donc $q_0 \geq \inf(p + v - 1, 2 - \frac{1}{q})$.

Soit alors $q_0 < r < \inf(q, q_0 + \frac{q - q_0}{q}, q_0 + (v-1))$ et $t_0 \in]0, T]$.

On a $u(t_0) \in L^{r-(v-1)}(\Omega)$ et donc d'après la Proposition 2.20, $u \in L^r([t_0, T] \times \Omega)$; d'autre part on a $q > \frac{q_0}{q_0 - r + 1}$; soit $\alpha \in]\frac{q_0}{q_0 - r + 1}, q[$, on a $(r-1) \frac{\alpha}{\alpha-1} < q_0$ et donc $\int_{]t_0, T[\times \Omega} (t - t_0) |v| |u|^{r-1} < +\infty$. Donc $(t - t_0)u \in L^\infty(t_0, T; L^r(\Omega))$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse q_0 maximum. Donc $u \in L_{loc}^\infty([0, T]; L^q(\Omega))$. Les autres propriétés s'en déduisent d'après la Proposition 2.19.

Remarque 2.14. Il serait intéressant d'étendre la Proposition 2.19 et le corollaire 2.11 au cas $p=1$. Remarquons que l'on a cette propriété au corollaire 2.11 lorsque β vérifie : il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall [r, s] \in \beta$, $|s| \geq \lambda |\phi(r)|$. En effet considérons alors $\zeta \in H^2(\Omega)$ tel que $-\Delta \zeta = 1$, $-\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = \lambda \zeta$ sur Γ . Multiplions (formellement) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \phi(u) = v$ par $\zeta p(\phi(u))$ où $p \in P_0$, en posant $\phi(r) = \int_0^r p(\phi(s)) ds$ et $k(r) = \int_0^r p(s) ds$, on obtient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int_{]0, T[\times \Omega} \frac{\partial}{\partial t} \phi(u) \zeta + \int_{]0, T[\times \Gamma} k(\phi(u)) \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} - \int_{]0, T[\times \Omega} k(\phi(u)) \Delta \zeta \\ + \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u)_x p(\phi(u))_x \zeta - \int_{]0, T[\times \Gamma} p(\phi(u)) \frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} \zeta \\ = \int_{]0, T[\times \Omega} v p(\phi(u)) \zeta, \end{aligned}$$

d'où puisque $\zeta \geq 0$ en faisant tendre $p(\varepsilon)$ vers $\text{sign}_0 s$,

$$\int_{]0,T[\times \Omega} |\phi(u)| \leq \int_{\Omega} |u_0| \zeta + \int_{]0,T[\times \Omega} |v| \zeta + \int_{]0,T[\times \Omega} \zeta \{ \text{sign}_0 u \frac{\partial \phi(u)}{\partial v} + \lambda \phi(u) \}$$

Or d'après l'hypothèse $-\text{sign}_0 u \frac{\partial \phi(u)}{\partial v} \geq \lambda |\phi(u)|$, d'où

$$\|\phi(u)\|_{L^1(]0,T[\times \Omega)} \leq \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \{ \|u_0\|_{L^1(\Omega)} + \|v\|_{L^1(]0,T[\times \Omega)} \}.$$

Il serait d'autre part intéressant d'étendre le corollaire 2.11 au cas $q=+\infty$. Notons que ces résultats généralisent ceux de Lions [31]. La généralisation des Proposition 2.20 et du corollaire 2.11 au cas d'une fonction ϕ quelconque reste à faire.

Enfin il me semble probable que les Propositions 2.19 et 2.20 soient valables sans la restriction β partout définie. Dans le cas d'un β quelconque, nous obtenons une solution sous forme d'inéquations variationnelles :

Proposition 2.21. Supposons ϕ localement lipchitzienne. Posons

$\theta(r) = \int_0^r \phi'(s)^{1/2} ds$ et soit $j : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty]$ convexe s.c.i. telle que $\partial j = \beta$ et $j(0) = 0$. Soient $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $v \in L^1(0,T; L^\infty(\Omega))$. Alors la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ vérifie

$$\phi(u) \text{ et } \theta(u) \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$$

$$(23) \left\{ \begin{aligned} & \int_{]0,T[\times \Omega} (f-u)f_t + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f(0,x)-u_0(x))^2 + \int_{]0,T[\times \Omega} \phi(u) x^f x \\ & + \int_{]0,T[\times \Gamma} j(f) \geq \int_{]0,T[\times \Omega} (f-u)v + \int_{]0,T[\times \Omega} \theta(u) x^2 x \\ & + \int_{]0,T[\times \Gamma} j(u) \end{aligned} \right.$$

pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \bar{\Omega})$.

Démonstration : Posons $\phi_\varepsilon(r) = \phi(r) + \varepsilon r$ et soit u_ε la solution de $\frac{du_\varepsilon}{dt} + A_{\beta, \phi_\varepsilon} u_\varepsilon = v$, $u_\varepsilon(0) = u_0$. Multipliant $\frac{\partial u_\varepsilon}{t} - \Delta \phi_\varepsilon(u_\varepsilon) = v$ par $f - u_\varepsilon$ et intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{]0,T[\times \Omega} (f-u_\varepsilon) f_t + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f(0,x)-u_0(x)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f(T,x)-u_\varepsilon(T)|^2 \\
& + \int_{]0,T[\times \Omega} \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)_x (f_x - (u_\varepsilon)_x) - \int_{]0,T[\times \Gamma} \frac{\partial \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial \nu} (f-u_\varepsilon) \\
& = \int_{]0,T[\times \Omega} v(f-u_\varepsilon) ,
\end{aligned}$$

d'où puisque $\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)_x (u_\varepsilon)_x \geq \theta(u_\varepsilon)_x^2$ et $\frac{\partial \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial \nu} (f-u) \geq j(u_\varepsilon) - j(f)$

p.p. sur $]0,T[\times \Gamma$,

$$\begin{aligned}
& \int_{]0,T[\times \Omega} (f-u_\varepsilon) f_t + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f(0,x)-u_0(x)|^2 + \int_{]0,T[\times \Omega} \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)_x f_x + \int_{]0,T[\times \Gamma} j(f) \\
& \geq \int_{]0,T[\times \Omega} (f-u_\varepsilon) v + \int_{]0,T[\times \Omega} \theta(u_\varepsilon)_x^2 + \int_{]0,T[\times \Gamma} j(u_\varepsilon) .
\end{aligned}$$

On en déduit, prenant $f=0$, que $\theta(u_\varepsilon)_x$ est borné dans $L^2(]0,T[\times \Omega)$.

On sait d'autre part (cf. Proposition 2.19) que $\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est borné dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et enfin $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega))$.

Utilisant le lemme 2.10., on en déduit que $\phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $\theta(u_\varepsilon) \rightarrow \theta(u)$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et

$\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)|_\Gamma \rightarrow \phi(u)|_\Gamma$ dans $L^2(]0,T[\times \Gamma)$. D'où (23) à la limite.

Corollaire 2.14. Supposons $\phi(r) = (\text{sign}_0 r) |r|^v$ avec $1 \leq v < +\infty$ et

posons $e(r) = (\text{sign}_0 r) \frac{|r|^{\frac{v+1}{2}}}{\frac{v+1}{2}}$, $j : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty]$ convexe s.c.i.

telle que $\partial j = \beta$, $j(0) = 0$. Soient $u_0 \in L^2(\Omega)$, $v \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

La solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ vérifie

$$\phi(u) \in L^{1+\frac{1}{v}}(0,T;W^{1,s}(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} s = \frac{2}{1+(1-\frac{1}{v})(1-\frac{2}{N})} & \text{si } N > 2 \\ s \text{ quelconque } < 2 & \text{si } N \leq 2 . \end{cases}$$

$$\theta(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

et la relation (23).

Démonstration : Soient $u_{0,n} \in L^\infty(\Omega)$, $v_n \in L^1(0,T;L^\infty(\Omega))$ tels que

$u_{0,n} \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$ et $v_n \rightarrow v$ dans $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, u_n la solution intégrale de $\frac{du_n}{dt} + Au_n = v_n$, $u_n(0) = u_{0,n}$. D'après la Proposition 2.21., u_n vérifie (23) et donc prenant $f=0$, $\theta(u_n)_x$ est borné dans $L^2([0,T] \times \Omega)$. D'autre part d'après la Proposition 2.20., $\phi(u_n)$ est bornée dans $L^{1+\frac{1}{v}}(0,T;W^{1,s}(\Omega))$. Appliquant le lemme 2.11., $\phi(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^{1+\frac{1}{v}}(0,T;W^{1,s}(\Omega))$, $\theta(u_n) \rightarrow \theta(u)$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et avec le même argument qu'à la Proposition 2.20., $u_n|_{\Gamma} \rightarrow u|_{\Gamma}$ dans $L^{v+1}(0,T;L^{vs}(\Gamma))$. Donc à la limite on a (23).

Remarque 2.15. Sous les conditions de la Proposition 2.21., pour

$u_0 \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Pour pouvoir poser la relation (23), il est suffisant que $\phi(u) \in L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$. Il me semble d'après le problème stationnaire que l'on doit avoir une régularité $\phi(u) \in L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$ avec $q < \frac{N}{N-1}$, pour des conditions $u_0 \in L^1(\Omega)$, $v \in L^1([0,T] \times \Omega)$. D'autre part le problème de l'extension de la Proposition 2.21 au cas d'un ϕ quelconque reste posé.

Etudions enfin la dérivabilité dans l'espace de mesures sur Ω et $\bar{\Omega}$. Nous notons $\mathcal{M}^1(\Omega)$ (resp. $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$) le dual de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ (resp. $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$) et nous considérons $L^1(\Omega)$ comme sous-espace de $\mathcal{M}^1(\Omega)$ (resp. $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$). Etudions d'abord $D(\hat{A})$.

Proposition 2.22. Soit $u_0 \in L^1(\Omega)$. Il y a équivalence entre

i) $u_0 \in D(\hat{A})$

ii) $A_\lambda u_0$ converge dans $\sigma(\mathcal{M}^1(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega))$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

Alors $\phi(u_0) \in W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, $\Delta \phi(u_0) \in \mathcal{M}^1(\Omega)$ et $A_\lambda u_0 \rightarrow -\Delta \phi(u_0)$ dans $\sigma(\mathcal{M}^1(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega))$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

Démonstration : On sait que ii) $\Rightarrow$ i). Supposons $u_0 \in D(\hat{A})$, alors $A_\lambda u_0$ est borné dans $L^1(\Omega)$ et donc d'après le théorème 2.1.5), $\phi(J_\lambda u_0) = \phi((I+A)^{-1}(A_\lambda u_0 + J_\lambda u_0))$ est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$. Puisque $J_\lambda u_0 \rightarrow u_0$ dans $L^1(\Omega)$, $\phi(u_0) \in W^{1,q}(\Omega)$ et $\phi(J_\lambda u_0) \rightarrow \phi(u_0)$

(*) $\Delta \phi(u_0)$ désigne le laplacien de $\phi(u_0)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

dans $W^{1,q}(\Omega)$. Soit $\lambda_n \rightarrow 0$ tel que $A_{\lambda_n} u_0 \rightarrow \mu$ dans $\sigma(\mathcal{M}^1(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega))$. Etant donné $f \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} (A_{\lambda} u_0) f = \int_{\Omega} \phi(J_{\lambda} u_0)_{xx} f_{xx} \quad \text{et donc à la limite, } \int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} \phi(u_0)_{xx} f_{xx}.$$

D'où $\mu = -\Delta \phi(u_0)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc $\Delta \phi(u_0) \in \mathcal{M}^1(\Omega)$ et

$$A_{\lambda} u_0 \rightarrow -\Delta \phi(u_0) \quad \text{dans } \sigma(\mathcal{M}^1(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega)).$$

Proposition 2.23. Soient $u_0 \in D(\hat{A})$, $v \in VB(0, T; L^1(\Omega))$. La solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ vérifie :

$$\phi(u) \in L^{\infty}(0, T; W^{1,q}(\Omega)) \quad \text{pour tout } 1 \leq q < \frac{N}{N-1}$$

$$\phi(u(t)) \in W^{1,q}(\Omega) \quad \text{et} \quad \Delta \phi(u(t)) \in \mathcal{M}^1(\Omega) \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

La fonction $u : [0, T] \mapsto \mathcal{M}^1(\Omega)$ est $\sigma(\mathcal{M}^1(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega))$ -dérivable à droite (resp. à gauche) en tout point $t \in [0, T[$ (resp. $]0, T]$) et $\frac{d^+ u}{dt}(t) = v(t+0) + \Delta \phi(u(t))$ (resp. $\frac{d^- u}{dt}(t) = v(t-0) + \Delta \phi(u(t))$).

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.12. Soient $u_n \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega))$, $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega))$, ϕ_n suite de fonctions strictement croissantes, $\phi_n^{-1} \rightarrow \phi^{-1}$ uniformément sur tout compact avec ϕ^{-1} strictement croissante, $1 \leq q < +\infty$. Si $\phi_n(u_n)$ est bornée dans $L^{\infty}(0, T; W^{1,q}(\Omega))$, alors pour tout $0 \leq s < 1$, $\phi_n(u_n) \in \mathcal{C}([0, T]; W^{s,q}(\Omega))$ et $\phi_n(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $\mathcal{C}([0, T]; W^{s,q}(\Omega))$.

Démonstration de la Proposition 2.23. On sait d'après les théorèmes généraux que u est lipschitzienne de $[0, T]$ dans $L^1(\Omega)$, $u(t) \in D(\hat{A})$ pour tout $t \in [0, T]$. Donc d'après la Proposition 2.22., $\phi(u(t)) \in W^{1,q}(\Omega)$ et $\Delta \phi(u(t)) \in \mathcal{M}^1(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$. Montrons que $\phi(u) \in L^{\infty}(0, T; W^{1,q}(\Omega))$ et

$$(24) \quad \int_{]0, T[\times \Omega} u f_t + v f = \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u)_{xx} f_{xx} \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^1([0, T] \times \Omega).$$

Alors on aura étant donné $t \in [0, T[$ et $h \in]0, T-t[$,

$$\int_{\Omega} \frac{u(t+h)-u(t)}{h} f = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_{\Omega} v f + \phi(u) f \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit $h_n \rightarrow 0$ tel que $\frac{u(t+h_n)-u(t)}{h_n} \rightarrow \mu$ dans $\sigma(\mathcal{M}^1(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega))$.

On a

$$\int f d\mu = \int_{\Omega} v(t+0)f + \phi(u(t))\Delta f \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

puisque $\phi(u) \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega))$ d'après le lemme 2.12., et donc

$\mu = v(t+0) + \Delta\phi(u(t))$. On en déduit que

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} \rightarrow v(t+0) + \Delta\phi(u(t)) \text{ dans } \sigma(\mathcal{M}^1(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega)) \text{ lorsque}$$

$h \downarrow 0$. La dérivabilité à gauche s'étudiera de la même manière.

Pour démontrer (24) utilisons $\phi_{\varepsilon} = [(\phi + \varepsilon I)^{-1} + \varepsilon I]^{-1}$. Il existe $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $u_{0,n} \in D(A_{\beta, \phi_{\varepsilon_n}}) \cap L^{\infty}(\Omega)$ tels que $u_{0,n} \rightarrow u_0$ dans

$L^1(\Omega)$ et $A_{\beta, \phi_{\varepsilon_n}} u_{0,n}$ borné dans $L^1(\Omega)$. En effet considérons

$$h_{\lambda, \varepsilon} = (I + \lambda A_{\beta, \phi_{\varepsilon}})^{-1} \phi_{\varepsilon}^{-1}(\phi(u_0)) : \text{on a } \|A_{\beta, \phi_{\varepsilon}} h_{\lambda, \varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\Delta\phi(u_0)\|_{\mathcal{M}^1(\Omega)}$$

d'autre part pour λ fixé, $h_{\lambda, \varepsilon} \rightarrow (I + \lambda A_{\beta, \phi})^{-1} u_0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

d'après la Proposition 2.17. et parce que $\phi_{\varepsilon}^{-1}(\phi(u_0))$ d'une part tend vers u_0 p.p. sur Ω , d'autre part est dominé par

$|u_0| + \varepsilon |\phi(u_0)|$ p.p. sur Ω et donc d'après Lebesgue converge vers u_0 dans $L^1(\Omega)$. Considérons enfin

$$k_{\lambda, \varepsilon, M} = \begin{cases} h_{\lambda, \varepsilon} + A_{\beta, \phi_{\varepsilon}} h_{\lambda, \varepsilon} & \text{si } |h_{\lambda, \varepsilon} + A_{\beta, \phi_{\varepsilon}} h_{\lambda, \varepsilon}| \leq M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $h_{\lambda, \varepsilon, M} = (I + A_{\beta, \phi_{\varepsilon}})^{-1} k_{\lambda, \varepsilon, M}$: on a $h_{\lambda, \varepsilon, M} \in D(A_{\beta, \phi_{\varepsilon}}) \cap L^{\infty}(\Omega)$,

pour λ et ε fixés, $h_{\lambda, \varepsilon, M} \rightarrow h_{\lambda, \varepsilon}$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $M \rightarrow +\infty$

$$\text{et enfin } \|A_{\beta, \phi_{\varepsilon}} h_{\lambda, \varepsilon, M}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|h_{\lambda, \varepsilon, M}\|_{L^1(\Omega)} + \|k_{\lambda, \varepsilon, M}\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\leq 2\{\|u_0\|_{L^1(\Omega)} + \varepsilon \|\phi(u_0)\|_{L^1(\Omega)} + \|\Delta\phi(u_0)\|_{\mathcal{M}^1(\Omega)}\}$$

d'où la propriété par extraction de suites.

Nous poserons $\phi_n = \phi_{\varepsilon_n}$ et nous considérerons enfin

$v_n \in VB(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ tel que $v_n \rightarrow v$ dans $L^1([0, T[\times \Omega)$ et la variation de v_n soit bornée. Soit u_n la solution de $\frac{du_n}{dt} + A_{\beta, \phi_n} u_n = v_n$, $u_n(0) = u_{0,n}$. D'après la Proposition 1.6., $\|\frac{du_n}{dt}\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))} \leq \|v_n(0_+) + \Delta \phi_n(u_{0,n})\|_{L^1(\Omega)} + \text{Variation de } v_n \text{ sur } [0, T]$ et donc d'après le lemme 2.8.,

$$\|\phi_n(u_n(t))\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq Cq \|\phi_n(u_n(t))\|_{L^1(\Omega)} + C \quad \forall t \in [0, T].$$

Par la méthode habituelle, on montrera que $\phi_n(u_n)$ est bornée dans $L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$. Utilisant alors les lemmes 2.10. et 2.12., $\phi_n(u_n) \rightarrow \phi(u)$ dans $L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$. Puisque l'inégalité (24) est évidemment vérifiée pour u_n , elle l'est à la limite pour u .

Démonstration du lemme 2.12. Reprenant le lemme 2.10.

$\phi_n(u_n(t)) \rightarrow \phi(u(t))$ dans $W^{s,q}(\Omega)$ p.p. $t \in]0, T[$. Considérons N ensemble négligeable tel que $\|\phi_n(u_n(t))\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq M \quad \forall t \notin N$ et $\forall n$. Il suffit pour démontrer le lemme de montrer que $\phi_n(u_n)$ est équicontinu de $]0, T[\setminus N$ dans $W^{s,q}(\Omega)$. Supposons que ce ne soit pas vrai : il existerait n_k suite extraite, $t_k, s_k \in]0, T[\setminus N$ telles que $t_k - s_k \rightarrow 0$ et $\phi_{n_k}(u_{n_k}(t_k)) - \phi_{n_k}(u_{n_k}(s_k))$ ne tende pas vers 0 dans $W^{s,q}(\Omega)$. On peut toujours supposer après extraction éventuelle d'une sous-suite que $t_k, s_k \rightarrow t$, $\phi_{n_k}(u_{n_k}(t_k)) \rightarrow h_1$ dans $W^{s,q}(\Omega)$ et p.p. et $\phi_{n_k}(u_{n_k}(s_k)) \rightarrow h_2$ dans $W^{s,q}(\Omega)$ et p.p.. On aura alors $u_{n_k}(t_k) \rightarrow \phi^{-1}(h_1)$ p.p., $u_{n_k}(s_k) \rightarrow \phi^{-1}(h_2)$ p.p. mais $u_{n_k}(t_k)$ et $u_{n_k}(s_k) \rightarrow u(t)$ dans $L^1(\Omega)$, donc $h_1 = h_2 = \phi(u(t))$ ce qui est contradictoire.

Remarque 2.16. Cette proposition généralise les résultats de Konishi [28], démontrés dans le cas $\beta = \{0\} \times \mathbb{R}$ et $v=0$ par une tout autre méthode. Dans le cas où v est absolument continue de $[0, T]$ dans $L^1(\Omega)$, on peut en effet facilement démontrer avec les mêmes techniques que $\frac{du}{dt}$ est $\sigma(\mathcal{H}^1(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega))$ -continue sur $[0, T]$.

La dérivabilité dans $\sigma(\mathcal{M}(\bar{\Omega}), \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$ est plus délicate : démontrons le résultat suivant pour illustrer les difficultés.

Proposition 2.24. Supposons β continue bornée. Soient $u_0 \in D(\hat{A})$, $v \in VB(0, T; L^1(\Omega))$. La solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ est $\sigma(\mathcal{M}(\bar{\Omega}), \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$ -dérivable à droite (resp. à gauche) en tout $t \in [0, T[$ (resp. $]0, T]$) et

$$\int_{\bar{\Omega}} f \, d\left(\frac{d^- u}{dt}(t)\right) + \int_{\Omega} \phi(u(t))_x f_x = \int_{\Omega} v(t+0)f + \int_{\Omega} \beta(u(t))f \quad \forall f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$$

$$(\text{resp. } \int_{\Omega} f \, d\left(\frac{d^+ u}{dt}(t)\right) + \int_{\Omega} \phi(u(t))_x f_x = \int_{\Omega} v(t-0)f + \int_{\Omega} \beta(u(t))f$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^1(\Omega) .$$

Démonstration : Reprenant la démonstration de la Proposition 2.23., on a

$$\int_{]0, T[\times \Omega} u_n f_t + v_n f = \int_{]0, T[\times \Omega} \phi_n(u_n)_x f_x + \int_{]0, T[\times \Gamma} \beta(u_n) f \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^1([0, T] \times \bar{\Omega})$$

et à la limite puisque $\phi_n(u_n)|_{\Gamma} \rightarrow \phi(u)|_{\Gamma}$ dans $L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$ et

$$\phi_n(u_n)|_{\Gamma} \rightarrow (u)|_{\Gamma} \text{ dans } \mathcal{C}([0, T]; L^q(\Gamma)), \quad \beta(u) \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega))$$

(on utilise ici l'hypothèse sur β) et

$$\int_{]0, T[\times \Omega} u f_t + v f = \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u)_x f_x + \int_{]0, T[\times \Gamma} \beta(u) f \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^1([0, T] \times \bar{\Omega}) .$$

Il est d'autre part facile de voir que $\phi(u)$ est continue de $[0, T]$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ faible.

Si $h_n \downarrow 0$ et $\frac{u(t+h_n) - u(t)}{h_n} \rightarrow \mu$ dans $\sigma(\mathcal{M}(\bar{\Omega}), \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$, on a

$$-\int_{\bar{\Omega}} f \, d\mu + \int_{\Omega} v(t+0)f = \int_{\Omega} \phi(u(t))_x f_x + \int_{\Gamma} \beta(u(t))f \quad \forall f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) .$$

Donc μ est indépendant de la suite $h_n \downarrow 0$, ce qui démontre la Proposition.

Remarque 2.17. Etendant la définition 2.4., la Proposition 2.24. exprime que la solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$ vérifie l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} - \Delta \phi(u) = v \\ - \frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} = \beta(u) \end{array} \right.$$

au sens de $\tilde{W}^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}^1(\bar{\Omega}))$.

Une étude systématique du problème $-\Delta u = \mu$ sur $\bar{\Omega}$, $+\frac{\partial u}{\partial \nu} = v$ sur Γ avec $\mu \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$, $v \in \mathcal{H}(\Gamma)$ me semble intéressante à effectuer et apporterait des précisions sur le problème (18) dans le cas général.

Le problème de l'unicité des solutions au sens faible des relations (21) ou (23) reste ouvert. Notons le cas particulier suivant :

$\beta \equiv 0$ (condition de Neumann). Etant donné $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v \in L^1(0,T;L^\infty(\Omega))$ il existe $u \in L^2([0,T[\times\Omega)$ unique tel que $\phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et

$$\int_{]0,T[\times\Omega} u f_t + v f + \int_{\Omega} u_0(x) f(0,x) = \int_{]0,T[\times\Omega} \phi(u)_x f_x \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^1([0,T[\times\bar{\Omega}))$$

En effet soient u et $\hat{u}$ deux solutions et posons

$$f(t,x) = \int_t^T (\phi(u(\tau,x)) - \phi(\hat{u}(\tau,x))) d\tau. \text{ Par densité on a}$$

$$\int_{]0,T[\times\Omega} (u-\hat{u}) f_t = \int_{]0,T[\times\Omega} (\phi(u) - \phi(\hat{u}))_x f_x$$

c'est-à-dire :

$$- \int_{]0,T[\times\Omega} (u-\hat{u})(\phi(u) - \phi(\hat{u})) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\int_0^T (\phi(u) - \phi(\hat{u}))_x \right)_x^2,$$

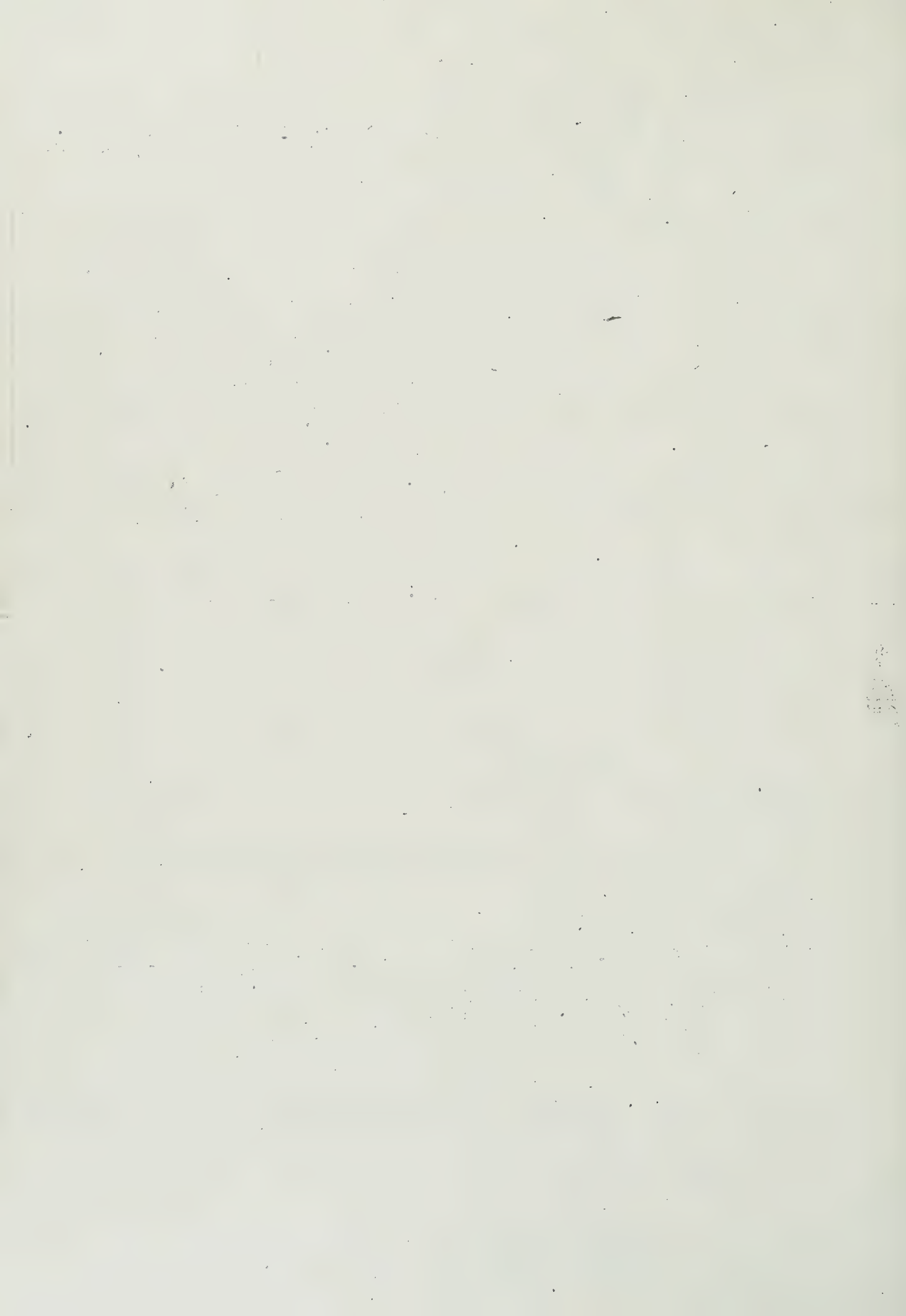
d'où $u = \hat{u}$.

Le cas $\beta = \{0\} \times \mathbb{R}$ a été étudié par Brézis [8] par les semi-groupes dans $H^{-1}(\Omega)$ et nous n'apportons rien de nouveau.

On obtient dans une classe plus restreinte :

Proposition 2.25. Supposons ϕ localement lipschitzienne et β partout définie. Soient $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $v \in L^1(0,T;L^\infty(\Omega))$. Il existe $u \in L^\infty([0,T[\times\Omega)$ unique tel que

$$\begin{array}{l} \phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \\ \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L_{loc}^1(0,T;L^1(\Omega)). \end{array}$$



Il existe $w \in L^1([0, T[\times \Gamma)$ tel que $w \in \mathcal{B}(u)$ p.p. sur $]0, T[\times \Gamma$ et

$$\int_{]0, T[\times \Omega} u f_t + v f = \int_{]0, T[\times \Omega} \phi(u)_{,x} f_x + \int_{]0, T[\times \Gamma} w f, \forall f \in \mathcal{C}_0^1([0, T[\times \bar{\Omega})$$

$u(t) \rightarrow u_0$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow 0$ essentiellement.

Démonstration : L'existence résulte de la Proposition 2.19. . Montrons l'unicité : soient u et $\hat{u}$ deux solutions. Etant donnés

$\gamma \in \mathcal{D}^+([0, T[)$ et $p \in P_0$ posons $f = p(\phi(u) - \phi(\hat{u}))\gamma$. D'après l'hypothèse, on a par densité

$$\int_{]0, T[\times \Omega} (u - \hat{u}) f_t = \int_{]0, T[\times \Omega} (\phi(u) - \phi(\hat{u}))_{,x} f_x + \int_{]0, T[\times \Gamma} (w - \hat{w}) f \geq 0$$

d'où en faisant tendre γ vers $\chi_{[s, t]}$ avec $0 < s < t < T$, points de Lebesgue de $u - \hat{u} \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u(t) - \hat{u}(t)) p(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(t))) &\leq \int_{\Omega} (u(s) - \hat{u}(s)) p(\phi(u(s)) - \phi(\hat{u}(s))) \\ &+ \int_s^t \int_{\Omega} (u - \hat{u}) p'(\phi(u) - \phi(\hat{u})) \frac{\partial}{\partial t} (\phi(u) - \phi(\hat{u})) . \end{aligned}$$

Montrons que le deuxième terme de droite tend vers 0 lorsque $p(r)$ tend vers $\text{sign}_0 r$ correctement.

Prenons $p(r) = \begin{cases} \text{sign}_0 r & \text{si } |r| \geq \varepsilon \\ r/\varepsilon & \text{si } |r| \leq \varepsilon \end{cases}$ et notons

$I_{\varepsilon} = \int_s^t \int_{\Omega} (u - \hat{u}) p'(\phi(u) - \phi(\hat{u})) \frac{\partial}{\partial t} (\phi(u) - \phi(\hat{u}))$. La fonction ϕ^{-1} étant uniformément continue sur $\{|r| \leq M = \|\phi(u)\|_{L^\infty} + \|\phi(\hat{u})\|_{L^\infty}\}$, soit η_{ε} son module de continuité uniforme sur ce compact. On a

$$I_{\varepsilon} \leq \eta_{\varepsilon} \int_{\Omega} dx \int_{\substack{s < \tau < t \\ |\phi(u(\tau, x)) - \phi(\hat{u}(\tau, x))| < \varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \text{sign}_0 (\phi(u(\tau, x)) - \phi(\hat{u}(\tau, x))) \frac{\partial}{\partial t} (\phi(u(\tau, x)) - \phi(\hat{u}(\tau, x))) d\tau$$

D'après l'hypothèse p.p. $x \in \Omega$, $h(\tau) = \phi(u(\tau, x)) - \phi(\hat{u}(\tau, x))$ est absolument continue sur $[s, t]$. On a alors

$$\int_{\substack{s < \tau < t \\ |h(\tau)| < \varepsilon}} (\text{sign}_0 h(\tau)) h'(\tau) d\tau = \int_{\substack{s < \tau < t \\ |h(\tau)| < \varepsilon}} \frac{d}{d\tau} |h(\tau)| d\tau \leq \varepsilon .$$

Donc $I_\varepsilon \leq \eta_\varepsilon |\Omega|$ et donc $I_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On a alors

$$\int_{\Omega} |u(t) - \hat{u}(t)| \leq \int_{\Omega} |u(s) - \hat{u}(s)|$$

et faisant $s \rightarrow 0$ essentiellement, $u(t) = \hat{u}(t)$ p.p.t.

Donnons enfin quelques propriétés complémentaires lorsque Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose désormais $\Omega =]0,1[$. On a alors immédiatement

$$D(A) = \{u \in \mathcal{C}([0,1]; \phi(u) \in \mathcal{C}^1([0,1]) , \frac{d\phi(u)}{dx} \in W^{1,1}(0,1) ,$$

$$\frac{d\phi(u(0))}{dx} \in \beta(u(0)) , - \frac{d\phi(u(1))}{dx} \in \beta(u(1))\}$$

$$\text{et } Au = - \frac{d^2 \phi(u)}{dx^2} .$$

$$D(\hat{A}) = \{u \in \mathcal{C}([0,1]; \phi(u) \in W^{1,\infty}(0,1) , \frac{d\phi(u)}{dx} \in VB(0,1)$$

$$\frac{d^+ \phi(u(0))}{dx} \in \beta(u(0)) , - \frac{d^- \phi(u(1))}{dx} \in \beta(u(1))\}$$

et pour tout $u \in D(\hat{A})$, $A_\lambda u$ converge dans $\sigma(\mathcal{M}([0,1]), \mathcal{C}([0,1]))$ vers la mesure μ définie par

$$\int f d\mu = \int_0^1 \frac{df}{dx} \frac{d\phi(u)}{dx} + f(0) \frac{d^+ \phi(u(0))}{dx} - f(1) \frac{d^- \phi(u(1))}{dx} \quad \forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]) .$$

Nous noterons cette mesure $- \frac{d^2 \phi(u)}{dx^2}$.

L'opérateur $u \in D(\hat{A}) \mapsto - \frac{d^2 \phi(u)}{dx^2} \in \mathcal{M}^1([0,1])$ est T-accrétif dans

$\mathcal{M}^1([0,1])$; nous le noterons $\hat{A}$ par abus de notation. Plus précisément si $u_i + \lambda \hat{A} u_i = \mu_i$ ($i=1,2$), on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u_1 - u_2)^+ + \lambda \{ (\frac{d^+}{dx}(\phi(u_1(0)) - \phi(u_2(0)))^- + (\frac{d^-}{dx}(\phi(u_1(1)) - \phi(u_2(1))))^- \} \\ \leq \|(\mu_1 - \mu_2)^+\|_{\mathcal{M}([0,1])} . \end{aligned}$$

L'opérateur $(I + \lambda \hat{A})^{-1}$ est continu de $\sigma(\mathcal{M}([0,1]), \mathcal{C}([0,1]))$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ et donc en particulier $\hat{A}$ est m-accrétif dans $\mathcal{M}([0,1])$.

La démonstration de ces propriétés est adaptée de celle du théorème 2.1., en utilisant essentiellement la compacité de l'injection $W^{1,\infty}(0,1) \rightarrow \mathcal{C}([0,1])$. Il est intéressant de noter les

propriétés des solutions intégrales :

Proposition 2.26. Soient d'abord $u_0 \in D(\hat{A})$ et $v \in VB(0, T; L^1(0, 1))$.

Alors la solution intégrale u de $\frac{du}{dt} + Au = v$, $u(0) = u_0$, vérifie

$$(i) \quad u \in \mathcal{C}([0, T] \times [0, 1]) \cap \tilde{W}^{1, \infty}(0, T; \mathcal{D}([0, 1]))$$

(ii) u est $\alpha(\mathcal{D}([0, 1]); \mathcal{C}([0, 1]))$ -dérivable à droite (resp. à gauche) en tout $t \in [0, T[$ (resp. $]0, T]$) et $\frac{d^+ u}{dt}(t) + \hat{A}u(t) = v(t+0)$ (resp. $\frac{d^- u}{dt}(t) + \hat{A}u(t) = v(t-0)$).

Si de plus ϕ est localement lipschitzienne, alors

$$(iii) \quad \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^1(0, 1))$$

et il y a unicité du problème [(i), (ii), (iii) et $u(0, x) = u_0(x)$ $\forall x \in [0, 1]$].

Démonstration : D'après la Proposition 2.23. nous savons que

$\phi(u) \in L^\infty(0, T; W^{1, q}(0, 1))$ pour tout $1 \leq q < +\infty$ et donc $\phi(u) \in \mathcal{C}([0, T] \times [0, 1])$ d'où i). Reprenant l'approximation de la Proposition 2.23., on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 u_n f_t + v_n f &= \int_0^T \int_0^1 \phi_n(u_n)_x f_x + \int_0^T f(t, 0) \frac{\partial}{\partial x} \phi_n(u_n(t, 0)) \\ &\quad - f(t, 1) \frac{\partial}{\partial x} \phi_n(u_n(t, 1)) \end{aligned}$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_0^1([0, T] \times [0, 1])$.

$\frac{\partial^2 \phi_n(u_n)}{\partial x^2}$ borné dans $L^\infty(0, T; L^1(0, 1))$; donc $\frac{\partial \phi_n(u_n)}{\partial x}$ borné dans $\mathcal{C}([0, T] \times [0, 1])$. D'autre part $\frac{\partial \phi_n(u_n(t, 0))}{\partial x}$ et $\frac{\partial \phi_n(u_n(t, 1))}{\partial x}$ sont

de variation bornée sur $[0, T]$ borné comme on le voit facilement à partir de (22) (valable ici sans restriction sur β puisque ce sont des solutions faibles). On en déduit que

$\frac{\partial \phi_n(u_n(t, 0))}{\partial x}$ et $\frac{\partial \phi_n(u_n(t, 1))}{\partial x}$ est relativement compact dans $L^1(0, T)$

et donc il existe $w_0, w_1 \in VB(0, T)$ tels que $w_x(t) \in \beta(u(t, x))$ p.p.t $\in]0, T[$ pour $x=0, 1$ et

$$\int_0^T \int_0^1 u f_t + v f = \int_0^T \int_0^1 \phi(u)_x f_x + \int_0^T f(t,0) w_0(t) - f(t,1) w_1(t)$$

$$\forall f \in \mathcal{C}_0^1([0,T[\times [0,1]) .$$

On achève pour démontrer (ii) comme à la Proposition 2.24.

D'après la Proposition 2.18. :

$$\int_0^T \int_0^1 t \phi'_n(u_n) \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 \leq \int_0^T \int_0^1 v_n \phi_n(u_n) + \int_\Omega \Phi_n(u_{0,n}) + \int_0^T \int_0^1 t \phi'_n(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial t} v$$

et donc d'après les estimations précédentes, lorsque ϕ est localement lipchitzienne,

$$\sqrt{t} \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L^2([0,T[\times]0,1[) . \text{ Mais } \frac{\partial \phi_n(u_n)}{\partial t} = \phi'_n(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial t} \text{ est borné}$$

dans $L^\infty(0,T;L^1(0,1))$ et donc $\frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^1(0,1))$.

Démontrons l'unicité du problème. On a $\frac{du}{dt}(t) + \hat{A}u(t) = v(t)$
p.p.t $\in]0,T[$ dans $\sigma(\mathcal{H}([0,1]); \mathcal{C}([0,1]))$ et donc pour tout
 $f \in \mathcal{C}_0^1([0,T[\times [0,1])$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 -u f_t + \int_0^T \left\{ \int_0^1 f_x \phi(u)_x + (f(t,0) \frac{\partial^+ \phi(u(t,0))}{\partial x} - f(t,1) \frac{\partial^- \phi(u(t,1))}{\partial x}) \right\} \\ = \int_0^T \int_0^1 f v , \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{\partial^+ \phi(u(t,0))}{\partial x} \in \beta(u(t,0)) \text{ et } - \frac{\partial^- \phi(u(t,1))}{\partial x} \in \beta(u(t,1))$$

$$\text{p.p.t} \in]0,T[.$$

L'unicité résulte alors de la Proposition 2.25.

Proposition 2.27. Soient $u_0 \in L^1(0,1)$, $v \in L^1([0,T[\times]0,1[)$ tels que
 $\sqrt{t} v \in L^2(0,T;L^1(0,1))$. La solution intégrale de $\frac{du}{dt} + Au = v$,
 $u(0) = u_0$ vérifie :

$$\text{i) } t\phi(u) \in L^2(0,T;H^1(0,1)) .$$

$$\text{ii) } \text{Il existe } w_0, w_1 \in L^1(0,T) \text{ tels que } w_x^{(t)} \in \beta(u(t,x))$$

$$\text{p.p.t} \in]0,T[\text{ pour } x=0,1 \text{ et}$$

$$\int_0^T \int_0^1 u f_t + v f = \int_0^T \int_0^1 \phi(u)_x f_x + \int_0^T (f(t,0) w_0(t) - f(t,1) w_1(t))$$

$$\forall f \in \mathcal{C}_0^1([0,T[\times [0,1]) .$$

Si de plus $v \in L^1_{loc}([0, T]; L^\infty(0, 1))$,

iii) $u \in L^\infty_{loc}([0, T]; \mathcal{C}([0, 1]))$.

Si encore de plus ϕ est localement lipschitzienne

iv) $\frac{\partial \phi(u)}{\partial t} \in L^2_{loc}([0, T]; L^2(0, 1))$

et il y a unicité du problème [i), ii), iii), iv) et $u(t) \rightarrow u_0$ dans $L^1(0, 1)$ lorsque $t \rightarrow 0$ essentiellement].

Démonstration : Lorsque ϕ , ϕ^{-1} sont localement lipschitziens, $u_0 \in L^\infty(0, 1)$, $v \in L^\infty([0, T[\times]0, 1[)$, multipliant $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} = v$ par $t^2 \phi(u)$, on obtient

$$(25) \quad \int_0^T \int_0^1 [t \phi(u)_x]^2 \leq \int_0^T \int_0^1 t^2 v \phi(u) + \int_0^T \int_0^1 2t \Phi(u).$$

Considérons alors dans le cas général ϕ_n régulière telle que $\phi_n^{-1} \rightarrow \phi^{-1}$ uniformément sur tout compact, $\phi_n \rightarrow \phi$ en tout point et donc $\Phi_n \rightarrow \Phi$ uniformément sur tout compact ;

$u_{0,n} \in L^\infty(0, 1)$ tels que $u_{0,n} \rightarrow u_0$ dans $L^1(0, 1)$;

$v_n \in L^\infty([0, T[\times]0, 1[)$ tels que $v_n \rightarrow v$ dans $L^1([0, T[\times]0, 1[)$ et $\sqrt{t} v_n \rightarrow \sqrt{t} v$ dans $L^2(0, T; L^1(0, 1))$. Alors la solution intégrale u_n

de $\frac{du_n}{dt} + A_{\beta, \phi_n} u_n = v_n, u_n(0) = u_{0,n}$ converge vers u dans

$\mathcal{C}([0, T]; L^1(0, 1))$. Il existe donc $x_0 \in]0, 1[$ tel que $u_n(t, x_0)$ soit borné pour $n \geq 1$ et $t \in [0, T]$ et donc $|\phi_n(u_n(t, x_0))| \leq M \forall n, \forall t \in [0, T]$. On a alors

$$|\phi_n(u_n(t, x))| \leq M + \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi_n(u_n(t, x))}{\partial x} \right| dx \quad \forall n, \quad \forall t, \quad \forall x.$$

On en déduit :

$$\|t \phi_n(u_n)\|_{L^2(0, T; L^\infty(0, 1))} \leq \frac{T^{3/2} M}{\sqrt{3}} + \|t \phi_n(u_n)_x\|_{L^2([0, T[\times]0, 1[)}$$

et en reportant dans (25), compte tenu de $\Phi(r) \leq r \phi(r)$ et par Hölder,

$$\begin{aligned}
& \|t\phi_n(u_n)_x\|_{L^2([0,T[\times]0,1[)}^2 \\
& \leq \|tv\|_{L^2(0,T;L^1(0,1))} \left\{ \frac{T^{3/2}M}{\sqrt{3}} + \|t\phi_n(u_n)_x\|_{L^2([0,T[\times]0,1[)} \right\} \\
& \quad + 2\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^1(0,1))} \left\{ \frac{T^2M}{\sqrt{3}} + \sqrt{T}\|t\phi_n(u_n)_x\|_{L^2([0,T[\times]0,1[)} \right\}^3
\end{aligned}$$

donc $t\phi_n(u_n)$ est borné dans $L^2(0,T;H^1(0,1))$. D'où i).

L'existence de w_0, w_1 se démontre à partir de la Proposition 2.26. et de la relation (22) valable pour les hypothèses de la Proposition 2.26. en approchant u_0, v par des $u_{0,n} \in D(\hat{A})$ et $v_n \in VB(0,T;L^1(\Omega))$.

De i), on déduit que $\phi(u(t)) \in H^1(0,1)$ p.p. $t \in]0,T[$ et donc $u(t) \in \mathcal{C}([0,1])$ p.p. $t \in]0,T[$. Pour tout $t_0 > 0$,

$$\|u\|_{L^\infty(t_0,T;L^\infty(0,1))} \leq \|u(t_0)\|_{L^\infty(0,1)} + \|v\|_{L^1(t_0,T;L^\infty(0,1))};$$

d'où iii). La propriété iv) et l'unicité se démontrent comme à la Proposition 2.26.

Remarque 2.18. On traiterait de même le problème $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \phi(u) = \sigma$, $u(t,0) = u(t,1)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1)$, $u(0,x) = u_0(x)$ pour obtenir une généralisation des résultats de Konishi [29].

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ASPLUND. Fréchet differentiability of convex functions.
Acta Math. 121 (68). pp. 31-47.
- [2] P. BENILAN. Une remarque sur la convergence des semi-groupes non linéaires.
CRAS. 272 (71). pp. 1182-1184.
- [3] Solutions périodiques. Exposé n°8 au Séminaire sur les opérateurs et les semi-groupes non linéaires, à Orsay 70-71.
- [4] Solutions intégrales d'équations d'évolution dans un espace de Banach.
CRAS. 274 (72). pp. 47-50.
- [5] P. BENILAN et H. BREZIS. Solutions faibles d'équation d'évolution dans un espace de Hilbert.
Ann. Inst. Fourier. 22 (72) pp. 311-329.
- [6] E. BISHOP et R. PHELPS. The support functionals of a convexe set, in convexity.
Proc. Symposia in Pure Math., vol.7 ;
Ann. Math. Soc. (62). pp. 27-35.
- [7] H. BREZIS. On a problem of T. Kato.
Comm. Pure Appl. Math. 24 (71). pp. 1-6.
- [8] Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires.
Israel Jour. Math. 9 (71). pp. 513-534.
- [9] Problèmes unilatéraux. (Thèse).
J. Math. Pures Appl. (72).
- [10] Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.
Cours de 3ème cycle rédigé par P. Bénéilan. Paris 1971.
- [11] H. BREZIS et PAZY. Accretive sets and differential equations in Banach spaces.
Israel J. Math. 8 (70). pp. 367-383.
- [12] Convergence and approximation of non linear semi-groups in Banach spaces. J. Funct. Anal. (71).
- [13] H. BREZIS et STRAUSS. Semi-linear second order elliptic equations in L^1 . (à paraître).

- [14] F. BROWDER. Non-linear operators and non linear equations of evolution in Banach spaces, Non-linear Functional Analysis.
Proc. Symp. Pure Math. Vol. 18. Part II. Amer. Math. Soc.
- [15] F. BROWDER et W. PETRYSHYN. The solution by iteration of non linear functional equations in Banach spaces.
Bull. Amer. Math. Soc. 72 (66). pp. 571-575.
- [16] B. CALVERT. Non linear evolution equations in Banach lattices.
Bull. Amer. Math. Soc. 76 (70), pp. 845-850.
- [17] Some T-accretive operators.
Proc. J. Math. 39 (71). pp. 293-350.
- [18] M. CRANDALL. A generalized domain for semi-group generators,
MRC Technical Summary Report#1189, Madison, Wisconsin.
- [19] The semi-group approach to first order quasi linear equations in several space variables.
MRC Technical summary report # 1196, Madison, Wisconsin
- [20] A conservation law (à paraître).
- [21] M. CRANDALL et T. LIGGET. Generation of semi-groups of non linear transformations in general Banach spaces.
Amer. J. Math. 93 (71). pp. 265-298.
- [22] A theorem and a conterexemple in the theory of semi-groups of non linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc. (à paraître).
- [23] M. CRANDALL et A PAZY. Non linear evolution equations in Banach spaces (à paraître).
- [24] T. KATO. Accretive operators and non linear evolution equations in Banach spaces, Non linear functional Analysis.
Proc. Symp. Pure Math. Vol.18, Part I, F. Browder ed. Amer. Math. Soc. (70). pp. 138-161.
- [25] Y. KOMURA. Non linear semi groups in Hilbert spaces.
J. Math. Soc. Japon. 19 (67). pp. 493-507.
- [26] Y. KONISHI. Une remarque sur la perturbation d'opérateurs m-accrétifs dans un espace de Banach.
Proc. Japon Ac. 48 (72). pp. 157-160.
- [27] Non linear semi-groups in Banach lattices.
Proc. Japon Ac. 47 (71). pp. 24-28.
- [28] On nonlinear semi-groups associated with $u_t = \Delta \beta(u)$ and $\phi(u_t) = \Delta u$. (A paraître).
- [29] Une méthode de résolution d'une équation d'évolution non linéaire dégénérée.
Jour. Fac. Sc. Un. Tokyo. 19 (72). pp. 243-255.

- [30] S.N. KRUSKOV. First order quasi linear equations in several independent variable.
Math. U.R.S.S. Sbornik. 10 (70). pp. 217-243.
- [31] J.L. LIONS. Quelques problèmes de la théorie des équations non linéaires d'évolution. Problems in non-linear analysis
CIME. Varenna 1970. pp. 242-271.
- [32] J.J. MOREAU. Fonctionnelles convexes. Collège de France (1967).
- [33] O. OLEINIK. Discontinuous solutions of non linear differential equations.
Amer. Math. Soc. Transl. (2), 26 (63). pp. 95-172.
- [34] C. PICARD. Opérateurs ϕ -accrétifs et génération de semi-groupes non linéaires.
CRAS. 275 (72). pp. 639-641.
- [35] B. QUINN. Time decreasing functionals of non linear conservation laws. Comm. of Pure and Appl. Math.
- [36] K. SATO. On the generator of non negative contraction semi-groups in Banach lattices.
J. Math. Soc. Japon. 20 (68). pp. 423-436.
- [37] V.L. SMULIAN. Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach.
Doklad. Akad. Nauk. U.R.S.S. 27. (40). pp. 643-648.
- [38] G. WEBB. Continuous non linear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces (à paraître).

